Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
20. Nov. 2019

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2, 3$ und $K_0 \subset K$ ein Unterkörper. Man beweise:

a) Sei $P(X) \in K_0[X]$ ein Polynom 3. Grades. Hat P eine mehrfache Nullstelle in K, so liegt die Nullstelle schon in K_0.

b) Sei C eine projektiv-algebraische ebene Kurve mit affiner Gleichung

$$Y^2 = X^3 + aX + b, \quad a, b \in K_0.$$

Besitzt C einen singulären Punkt Q in $\mathbb{P}_2(K)$, so liegt Q schon in $\mathbb{P}_2(K_0)$.

Aufgabe 18

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2, 3$ und $E \subset \mathbb{P}_2(K)$ eine elliptische Kurve mit affiner Gleichung $Y^2 = X^3 + aX + b$.

Man zeige: Die Gleichung von E lässt sich mittels einer Transformation

$$X \mapsto \alpha X, \quad Y \mapsto \beta Y, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$$

in eine der folgenden Formen transformieren:

i) $Y^2 = X^3 + X + B$,

ii) $Y^2 = X^3 + 1$.

Aufgabe 19

Sei K ein Körper und seien $A_\nu = (a_\nu, b_\nu) \in K^2$, $\nu = 1, 2, 3$, drei Punkte in der affinen Ebene über K.

Man beweise: Die Punkte A_1, A_2, A_3 liegen genau dann auf einer Geraden, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

---

b.w.

Aufgabe 20

Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2, 3$ und $E_a \subset \mathbb{P}_2(K)$ die Kurve 3. Ordnung mit affiner Geichung $y^2 = x^3$ und unendlich-fernem Punkt $\mathfrak{O} = (0 : 0 : 1)$. Man zeige:

a) Die Kurve E_a hat einen einzigen singulären Punkt S mit den affinen Koordinaten $(0, 0)$.

b) Die Abbildung $\phi : K \to E_{a,\mathrm{reg}} := E_a \setminus \{S\}$,

$$t \mapsto \phi(t) := \begin{cases} (t^{-2}, t^{-3}) & \text{für } t \neq 0, \\ \mathfrak{O} & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

ist bijektiv.

Vermöge ϕ werde die Struktur der additiven Gruppe $(K, +)$ auf $E_{a,\mathrm{reg}}$ übertragen; dabei wird der Punkt $\mathfrak{O}$ das neutrale Element. Die Verknüpfung auf $E_{a,\mathrm{reg}}$ werde mit $\oplus$ bezeichnet.

c) Schneidet eine Gerade $\ell \subset \mathbb{P}_2(K)$, die nicht durch den Punkt S geht, die Kurve E_a in drei Punkten P_1, P_2, P_3, wobei jeder Punkt sooft aufgezählt wird, wie seiner Vielfachheit entspricht, so gilt $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 = \mathfrak{O}$.
