Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
6. Dez. 2019

# Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

## Lösung der Aufgaben 13 und 15

### Aufgabe 13

a) Man zeige für die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zum Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - 30G_4(\Lambda).$$

b) Durch Betrachtung der Laurent-Entwicklungen von $\wp''$ und $\wp^2$ um den Nullpunkt beweise man die folgende Beziehung zwischen den Eisensteinreihen $G_4$ und $G_8$

$$7G_8(\Lambda) = 3G_4(\Lambda)^2.$$

**Lösungsvorschlag**

a) Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zum Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ genügt der Differential-Gleichung

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3, \qquad g_2 = 60G_4(\Lambda),\ g_3 = 140G_6(\Lambda).$$

Differentiation nach $z$ ergibt

$$2\wp'(z)\wp''(z) = 12\wp(z)^2\wp'(z) - g_2\wp'(z).$$

Nach Kürzung durch $2\wp'(z)$ erhält man

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \tfrac{1}{2}g_2 = 6\wp(z)^2 - 30G_4, \qquad \text{q.e.d.}$$

b) Die Laurent-Reihe der $\wp$-Funktion um den Nullpunkt lautet

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)G_{2k+2}z^{2k}\\ &= \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + 7G_8z^6 + O(z^8),\end{aligned}$$

wobei $O(z^8)$ für Glieder der Ordnung $z^8$ und höher steht. Daraus folgt

$$\wp(z)^2 = \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + (9G_4^2 + 14G_8)z^4 + O(z^6)$$

und

$$\wp''(z) = \frac{6}{z^4} + 6G_4 + 60G_6z^2 + 210G_8z^4 + O(z^6).$$

**b.w.**

Nach Teil a) ist $\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - 30G_4$. Die Entwicklungen der rechten und linken Seite müssen deshalb übereinstimmen. Vergleich der Koeffizienten von $z^4$ ergibt

$$6(9G_4^2 + 14G_8) = 210G_8,$$

also

$$9G_4^2 + 14G_8 = 35G_8 \;\Rightarrow\; 9G_4^2 = 21G_8 \;\Rightarrow\; 7G_8 = 3G_4^2, \qquad \text{q.e.d.}$$

*Bemerkung.* Einen anderen Beweis von Teil a) erhält man ebenfalls mittels der Laurent-Entwicklungen von $\wp(z)^2$ und $\wp''(z)$, da sich herausstellt, dass $\wp''(z) - 6\wp(z)^2$ holomorph und doppelt-periodisch, also konstant ist.

---

**Aufgabe 15**

Sei $E \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ eine elliptischen Kurve mit der affinen Gleichung

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Da der unendlich-ferne Punkt ein Wendepunkt ist, liegen also 8 Wendepunkte im affinen Teil von $E$. Man zeige: Die $x$-Koordinaten dieser Wendepunkte sind die Lösungen der Gleichung

$$3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2 = 0.$$

*Hinweis.* Ein Wendepunkt $P \in E$ genügt der Beziehung $2P = -P$.

**Lösungvorschlag**

Wir verwenden die Parameter-Darstellung der elliptischen Kurve durch die Weierstraßsche $\wp$-Funktion und ihre Ableitung

$$z \mapsto (\wp(z), \tfrac{1}{2}\wp'(z)).$$

Dabei sei das Gitter $\Lambda$ so gewählt, dass $a = -g_2/4 = -15G_4(\Lambda)$, $b = -g_3/4 = -35G_6(\Lambda)$. (Dies ist immer möglich, wie später in der Vorlesung bewiesen wird.)

Sei $P = (x, y)$ ein Punkt der Kurve und $2 \cdot P = (x_2, y_2)$ (bzgl. der Gruppenstruktur der Kurve). Ist $x = \wp(z)$, so gilt (unter Benutzung von Aufgabe 13a)

$$\begin{aligned} x_2 &= \wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 \\ &= -2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6x^2 + 2a)^2}{4x^3 + 4ax + 4b} \\ &= -2x + \frac{9x^4 + 6ax^2 + a^2}{4x^3 + 4ax + 4b} \end{aligned}$$

Die Gleichung $2P = -P$ liefert $x_2 = x$, also

$$3x = \frac{9x^4 + 6ax^2 + a^2}{4x^3 + 4ax + 4b} \;\Rightarrow$$

$$12x^4 + 12ax^2 + 12bx = 9x^4 + 6ax^2 + a^2 \;\Rightarrow$$

$$3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2 = 0, \qquad \text{q.e.d.}$$