

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

a) Man zeige für die Weierstraßsche \wp -Funktion zum Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - 30G_4(\Lambda).$$

b) Durch Betrachtung der Laurent-Entwicklungen von \wp'' und \wp^2 um den Nullpunkt beweise man die folgende Beziehung zwischen den Eisensteinreihen G_4 und G_8

$$7G_8(\Lambda) = 3G_4(\Lambda)^2.$$

Aufgabe 14

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{Char}(K) \neq 2, 3$ (z.B. $K = \mathbb{C}$) und seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in K$ paarweise verschiedene Zahlen. Sei

$$f_4(X) := \prod_{\nu=1}^4 (X - a_\nu) \in K[X]$$

und seien $C', C'' \subset \mathbb{P}_2(K)$ die Kurven mit den affinen Gleichungen

$$Y^2 = f_4(X) \quad \text{bzw.} \quad Y^3 = f_4(X).$$

Man bestimme alle Singularitäten von C' und C'' .

Aufgabe 15

Sei $E \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ eine elliptischen Kurve mit der affinen Gleichung

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Da der unendlich-ferne Punkt ein Wendepunkt ist, liegen also 8 Wendepunkte im affinen Teil von E . Man zeige: Die x -Koordinaten dieser Wendepunkte sind die Lösungen der Gleichung

$$3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2 = 0.$$

Hinweis. Ein Wendepunkt $P \in E$ genügt der Beziehung $2P = -P$.

Aufgabe 16

Sei $E \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ eine elliptische Kurve. Man zeige:

- a) Verbindet man zwei Wendepunkte von E durch eine Gerade, so schneidet die Gerade die Kurve in einem weiteren Wendepunkt.
 - b) Wieviele verschiedene Verbindungsgeraden von Wendepunkten von E gibt es insgesamt?
-