Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
6. Nov. 2019

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 3

Aufgabe 9

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\Lambda' := \mathbb{Z}\,\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \mathbb{Z}\,\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$.

a) Man zeige: $\Lambda \subset \Lambda'$ und die Quotienten-Gruppe Λ'/Λ hat die Ordnung 2.

b) Es bezeichne $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ den Körper aller bzgl. Λ doppelt-periodischen meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$; entsprechend $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda')$. Da jede bzgl. Λ' doppelt-periodische Funktion auch doppelt-periodisch bzgl. Λ ist, hat man eine natürliche Inklusion

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda') \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda).$$

Man zeige, dass dies eine Körper-Erweiterung vom Grad 2 ist und dass die Abbildung

$$S : \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda) \to \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda), \qquad f \mapsto Sf, \quad (Sf)(z) := f(z + \tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}),$$

ein Körper-Automorphismus von $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ ist mit $S^2 = \mathrm{id}$ und

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda') = \mathrm{Fix}(S) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda) : f = Sf\}.$$

Aufgabe 10

Sei $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ die projektiv-algebraische Kurve mit affiner Gleichung

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 = r^2, \quad a, b, r \in \mathbb{R},\ r > 0,$$

(Kreis mit Mittelpunkt (a, b) und Radius r).

a) Man zeige, dass C die unendlich ferne Gerade $\{x_0 = 0\}$ in genau zwei Punkten I_1, I_2 schneidet (sog. imaginäre Kreispunkte).

b) Man berechne die Tangenten ℓ_1, ℓ_2 an C in den Punkten I_1 und I_2 sowie den Schnittpunkt $\ell_1 \cap \ell_2$.

Aufgabe 11

Für $m \geqslant 2$ sei $C_m \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ die *Fermat-Kurve* der Ordnung m mit Gleichung

$$x_1^m + x_2^m = x_0^m.$$

a) Man zeige, dass die Fermat-Kurve C_m singularitätenfrei ist.

b) In welchen Punkten schneidet C_m die unendlich-ferne Gerade?

---

b.w.

Aufgabe 12 (Fortsetzung von Aufgabe 11)

a) Man zeige, dass der Punkt $(1 : 0 : 1)$ ein Wendepunkt der Fermat-Kurve C_3 ist. Welches sind die anderen Wendepunkte von C_3 ?

b) Man transformiere die Kurve C_3 mittels einer über $\mathbb{Q}$ definierten projektiv-linearen Abbildung $\phi \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{Q})$ in eine Kurve $C_3' := \phi(C_3) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, deren affiner Teil eine Gleichung der Gestalt

$$Y^2 = X^3 + aX + b$$

hat und gebe die Koeffizienten a, b explizit an.
