Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
30. Okt. 2019

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 2

Aufgabe 5

a) Man beweise

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Anleitung. Sei $F(z) := (\frac{\pi}{\sin \pi z})^2$ und $G(z) := \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$. Man zeige, dass $F(z) - G(z)$ holomorph in ganz $\mathbb{C}$ ist und dass gilt:

$$\lim_{\mathrm{Im}(z)\to\infty} F(z) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\mathrm{Im}(z)\to\infty} G(z) = 0.$$

b) Für alle natürlichen Zahlen $k \geqslant 2$ beweise man die Gültigkeit folgender Fourier-Entwicklungen in der oberen Halbebene

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+z)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n z}.$$

Anleitung. Für $k = 2$ erhält man dies mit Teil a) durch Differentiation des Resultates aus Aufgabe 3b). Für $k > 2$ zeigt man den Induktionsschritt $k-1 \to k$ durch Differenzieren.

Aufgabe 6

Für eine natürliche Zahl k ist die arithmetische Funktion $\sigma_k : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k.$$

Dabei ersteckt sich die Summe über alle positiven Teiler d von n, z.B.

$$\begin{aligned} \sigma_1(6) &= 1+2+3+6 = 12, \\ \sigma_3(15) &= 1^3 + 3^3 + 5^3 + 15^3 = 3528. \end{aligned}$$

Man beweise für die Eisensteinreihe $G_{2k}(\tau)$, $(k \geqslant 2)$, zum Gitter $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$, folgende Fourier-Entwicklung in der oberen Halbebene:

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n \tau}.$$

Anleitung. Man verwende die Aufgaben 4c) und 5b).

Aufgabe 7

Für $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ und $k \geqslant 2$ sei definiert

$$G_{2k}^*(\tau) := \sum_{\gcd(m,n)=1} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}.$$

Dabei wird über alle teilerfremden Paare (m,n) ganzer Zahlen summiert. Man zeige, dass $G_{2k}^*(\tau)$ zur gewöhnlichen Eisensteinreihe $G_{2k}(\tau)$ in folgender Beziehung steht:

$$G_{2k}(\tau) = \zeta(2k) G_{2k}^*(\tau).$$

Aufgabe 8

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion, die in D der Differentialgleichung

$$f'(z)^2 = 4f(z)^3 - g_2 f(z) - g_3 \tag{$*$}$$

genügt. Dabei seien $g_2 = 60G_4(\Lambda)$ und $g_3 = 140G_6(\Lambda)$ bzgl. eines Gitters $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

Man beweise: Es gibt eine Konstante $a \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = \wp_\Lambda(z-a) \quad \text{für alle } z \in D.$$

Die Konstante a ist modulo Λ eindeutig bestimmt.

Gibt es auch konstante Lösungen der Differentialgleichung $(*)$?
