4. Thetafunktionen. Abelsches Theorem

4.1. Definition (Multipliktiv-automorphe Funktionen). Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *multiplikativ-automorph* bzgl. des Gitters $\Lambda \subset \mathbb{C}$, wenn es holomorphe Funktionen ohne Nullstellen

$$\mu_\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, \qquad \omega \in \Lambda,$$

gibt, so dass

$$f(z+\omega) = f(z)\mu_\omega(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und } \omega \in \Lambda.$$

Die Funktionen $(\mu_\omega)_{\omega\in\Lambda}$ heißen die *Automorphie-Faktoren* der Funktion f.

Bemerkungen

a) Ist f nicht identisch 0, so sind die Automorphie-Faktoren durch f eindeutig bestimmt und genügen der Formel

$$\mu_{\omega+\omega'}(z) = \mu_\omega(z)\mu_{\omega'}(z+\omega),$$

wie man leicht nachrechnet. Daraus folgt auch, dass man für ein Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ nur μ_{ω_1} und μ_{ω_2} zu kennen braucht, um alle μ_ω zu kennen.

b) Zwar ist eine nicht-konstante multiplikativ-automorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht doppelt-periodisch bzgl. Λ, aber die Nullstellen von f sind invariant gegenüber Translation mit Vektoren aus Λ (einschließlich Vielfachheiten), so dass man eindeutig von den Nullstellen $z \in \mathbb{C}/\Lambda$ einer multiplikativ-automorphen Funktion sprechen kann.

c) Sind f, g zwei multiplikativ-automorphe holomorphe Funktionen bzgl. desselben Systems $(\mu_\omega)_{\omega\in\Lambda}$ von Automorphie-Faktoren, und ist g nicht identisch Null, so ist der Quotient $F := f/g$ eine doppelt-periodische meromorphe Funktion bzgl. Λ.

4.2. Definition. Eine *Thetafunktion* $\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bzgl. eines Gitters $\Lambda \in \mathbb{C}$ ist eine holomorphe multiplikativ-automorphe Funktion bzgl. Λ, deren Automorphie-Faktoren die folgende spezielle Gestalt haben:

$$\mu_\omega(z) = e^{L_\omega(z)},$$

mit affin-linearen Funktionen

$$L_\omega(z) = a_\omega z + b_\omega, \qquad a_\omega, b_\omega \in \mathbb{C}.$$

Eine Thetafunktion θ hat also das Automorphie-Verhalten

$$\theta(z+\omega) = \theta(z)e^{a_\omega z + b_\omega} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Lambda.$$

4.3. Satz. *Sei $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ eine Thetafunktion ohne Nullstellen bzgl. eines Gitters $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Dann hat F die Gestalt*

$$F(z) = e^{Q(z)}$$

mit einem quadratischen Polynom

$$Q(z) = az^2 + bz + c, \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Umgekehrt ist jede solche Funktion $F(z) = e^{Q(z)}$ eine Thetafunktion ohne Nullstellen.

Beweis. a) Da F nirgends verschwindet und $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängt, existiert ein holomorpher Zweig $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von $\log F$. Als Thetafunktion genügt F der Beziehung

$$F(z + \omega) = F(z)e^{L_\omega(z)}$$

Logarithmieren ergibt

$$\Phi(z + \omega) = \Phi(z) + L_\omega(z) + 2k\pi i.$$

(Der Summand $2k\pi i$ kommt daher, dass der Logarithmus nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ bestimmt ist.) Zweimaliges Differenzieren nach z ergibt

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z + \omega) = \frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Lambda.$$

Daher ist $d^2\Phi(z)/dz^2$ eine doppelt-periodische holomorphe Funktion bzgl. Λ, also eine Konstante. Daraus folgt, dass $\Phi(z)$ ein quadratisches Polynom ist:

$$\Phi(z) = Q(z) := az^2 + bz + c, \quad a, b, c \in \mathbb{C},$$

(Entartungsfälle, dass einige der Koeffizienten a, b, c verschwinden, können vorkommen.) Schließlich ergibt sich

$$F(z) = e^{\Phi(z)} = e^{Q(z)}, \quad \text{q.e.d.}$$

b) Dass umgekehrt jede Funktion der Form $F(z) = e^{Q(z)}$ eine Thetafunktion ist, folgt daraus, dass

$$Q(z + \omega) - Q(z) = (2a\omega)z + (a\omega^2 + b\omega) =: L_\omega(z).$$

4.4. Normalisierte Thetafunktionen. Bekanntlich ist jedes Gitter in $\mathbb{C}$ äquivalent zu einem Gitter der Gestalt

$$\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau, \quad \tau \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(\tau) > 0.$$

Eine Thetafunktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bzgl. des Gitters $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, heißt *normalisiert*, falls

$$F(z + 1) = F(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

d.h. F ist einfach-periodisch mit der Periode 1. Natürlich hat man außerdem noch für den Gittervektor $\tau \in \Lambda$ das Automorphie-Verhalten

$$F(z+\tau) = F(z)e^{L(z)}$$

mit einer affin-linearen Funktion $L(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$.

4.5. Satz. *Sei $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Thetafunktion bzgl. des Gitters $\Lambda = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Dann kann $F(z)$ durch Multiplikation mit einer geeigneten trivialen Thetafunktion der Gestalt $g(z) = e^{Q(z)}$, ($Q(z)$ quadratisches Polynom), normalisiert werden.*

Beweis. Für $g(z) := e^{\alpha z^2+\beta z}$ gilt

$$g(z+1) = g(z)e^{2\alpha z+(\alpha+\beta)}.$$

Falls $F(z+1) = F(z)e^{az+b}$, setze man $\alpha := -a/2$ und $\beta := -b + a/2$. Dann ist $F_1(z) := F(z)g(z)$ eine normalisierte Thetafunktion.

4.6. Die Standard-Thetareihe. Das wichtigste Beispiel einer normalisierten Thetafunktion bzgl. des Gitters $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$, wird gegeben durch die Thetareihe

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2\tau} e^{2\pi i n z}. \tag{$*$}$$

Da mit $T := \mathrm{Im}(\tau)$ und $y := \mathrm{Im}(z)$ gilt

$$|e^{i\pi n^2\tau} e^{2\pi i n z}| = e^{-\pi n^2 T} e^{-2\pi n y},$$

folgt, dass die Fourierreihe $\theta(z)$ auf jedem kompakten Teil von $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert, also eine ganze holomorphe Funktion darstellt. Außerdem ist $\theta(z)$ periodisch mit Periode 1. Es ist also nur noch das Automorphie-Verhalten bei Translation um τ zu untersuchen.

Behauptung. Für die Thetareihe $(*)$ gilt

$$\theta(z+\tau) = \theta(z)e^{-2\pi i z - i\pi\tau} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\theta(z+\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2\tau} e^{2\pi i n(z+\tau)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\big(i\pi n^2\tau + 2\pi i n\tau + 2\pi i n z\big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\big(i\pi\tau(n+1)^2 - i\pi\tau + 2\pi i(n+1)z - 2\pi i z\big) \\
&= e^{-2\pi i z - i\pi\tau} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(n+1)^2\tau} e^{2\pi i(n+1)z} \\
&= e^{-2\pi i z - i\pi\tau}\theta(z), \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

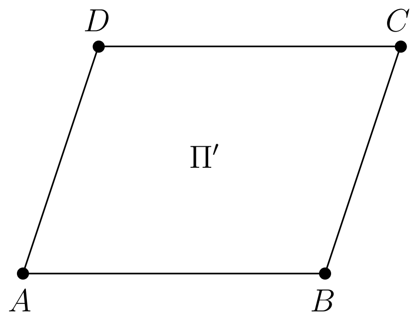
4.7. Satz. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine normalisierte Thetafunktion bzgl. des Gitters $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$, mit genau n Nullstellen modulo Λ (unter Berücksichtigung der Vielfachheiten). Dann gilt*

$$f(z+\tau) = f(z)e^{-2\pi i n z + b} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit einer Konstanten } b \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Als normalisierte Thetafunktion erfüllt f die Relationen

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+\tau) = f(z)e^{az+b}.$$

Sei $\Pi := \{\lambda + \mu\tau : \lambda, \mu \in [0,1]\}$ ein Fundamental-Parallelogramm des Gitters Λ. Nach evtl. Translation um einen Vektor $t \in \mathbb{C}$ kann man voraussetzen, dass auf dem Rand von $\Pi' := t + \Pi$ keine Nullstelle von f liegt, vgl. Figur 4.1.



$A = t,$
$B = t + 1,$
$C = t + 1 + \tau,$
$D = t + \tau$

Figur 4.1

Dann gilt

$$\int_{\partial\Pi'} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i n.$$

Wir setzen zur Abkürzung $g(z) := f'(z)/f(z)$. Es ist

$$g(z+1) = g(z) \quad \text{und} \quad g(z+\tau) = g(z) + a,$$

woraus folgt

$$\int_{BC} g(z)dz = \int_{AD} g(z)dz$$

und

$$\int_{DC} g(z)dz = \int_{AB} (g(z)+a)dz = \int_{AB} g(z)dz + a,$$

also insgesamt

$$2\pi i n = \int_{\partial\Pi'} g(z)dz = \Big(\int_{AB} - \int_{DC}\Big) g(z)dz + \Big(\int_{BC} - \int_{AD}\Big) g(z)dz = -a,$$

woraus die Behauptung folgt.

4.8. Satz. *Die Thetareihe* $\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2\tau} e^{2\pi i n z}$ *hat modulo* $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$ *genau eine Nullstelle, nämlich an der Stelle* $z = \frac{1}{2}(1+\tau)$.

Beweis. Da $\theta(z+\tau) = \theta(z)e^{-2\pi i z - i\pi\tau}$, folgt aus Satz 4.7, dass $\theta(z)$ modulo Λ genau eine Nullstelle hat. Wir zeigen, dass diese Nullstelle bei $z = \frac{1}{2}(1+\tau)$ liegt. Dies sieht man mit folgender Rechnung

$$\theta(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\tau}{2}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(n^2\tau + n\tau + n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n e^{i\pi n(n+1)\tau}.$$

Wir zerlegen jetzt die letzte Summe in zwei Teile mit n gerade und n ungerade. Für $k \in \mathbb{Z}$ durchläuft $2k$ alle geraden Zahlen und $-2k-1$ alle ungeraden Zahlen. Damit wird

$$\theta(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\tau}{2}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\cdot 2k(2k+1)\tau} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\cdot(-2k-1)(-2k)\tau} = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

Aus der Standard-Thetareihe $(*)$ kann man nun eine weitere normalisierte Thetafunktion ableiten, die eine einzige Nullstelle modulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ an der Stelle 0 hat.

4.9. Corollar. *Die Funktion*

$$\theta_1(z) := \theta(z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\tau}{2})$$

ist eine normalisierte Thetafunktion bzgl. des Gitters $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$ *mit einer einzigen Nullstelle* $0 \in \mathbb{C}/\Lambda$ *und dem Automorphie-Verhalten*

$$\theta_1(z+\tau) = \theta_1(z)e^{-2\pi i z + i\pi} = -\theta_1(z)e^{-2\pi i z}. \tag{2}$$

Beweis. a) Da $-\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} \equiv \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} \mod \Lambda$, ist

$$\theta_1(0) = \theta(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\tau}{2}) = \theta(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\tau}{2}) = 0.$$

b) Das Automorphie-Verhalten ergibt sich aus Formel (1):

$$\begin{aligned}\theta_1(z+\tau) &= \theta(z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\tau}{2} + \tau) = \theta(z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\tau}{2}) \exp\big(-2\pi i(z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\tau}{2}) - i\pi\tau\big) \\ &= \theta_1(z)e^{-2\pi i z + i\pi} = -\theta_1(z)e^{-2\pi i z}, \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

4.10. Satz (Abelsches Theorem). *Sei* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *ein Gitter. Gegeben seien zwei* n*-tupel* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *und* $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ *mit* $a_k \not\equiv b_j \mod \Lambda$ *für alle* $1 \leqslant k, j \leqslant n$. *Genau dann gibt es eine bzgl.* Λ *doppelt-periodische meromorphe Funktion* $F : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ *mit Nullstellen* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}/\Lambda$ *und Polstellen* $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}/\Lambda$, *wenn*

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \equiv 0 \mod \Lambda.$$

(Falls einige der a_k modulo Λ zusammenfallen, wird von F eine Nullstelle entsprechender Vielfachheit verlangt; analog bei den Polstellen.)

Beweis. a) Die Notwendigkeit der Bedingung wurde schon früher gezeigt.

b) O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Wir konstruieren zwei normalisierte Thetafunktionen $f(z)$ mit den Nullstellen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}/\Lambda$ und $g(z)$ mit den Nullstellen $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}/\Lambda$, die beide dasselbe Automorphie-Verhalten aufweisen. Dann ist $F(z) := f(z)/g(z)$ eine doppelt-periodische meromorphe Funktion mit den vorgeschriebenen Null- und Polstellen.

Sei $f_1(z) := \theta_1(z - a_1)$ mit der Funktion $\theta_1(z)$ aus Corollar 4.9 und dem Automorphie-Verhalten

$$\begin{aligned} f_1(z+\tau) &= \theta_1(z - a_1 + \tau) = -\theta_1(z - a_1)e^{-2\pi i(z-a_1)} \\ &= -f_1(z)e^{-2\pi i z + 2\pi i a_1}. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$f(z) := \prod_{k=1}^{n} \theta_1(z - a_k)$$

ist dann eine normalisierte Thetafunktion mit den Nullstellen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}/\Lambda$ und dem Automorphie-Verhalten

$$f(z+\tau) = (-1)^n f(z) e^{-2\pi i n z} e^{2\pi i A} \quad \text{mit } A := a_1 + \ldots + a_n.$$

Ebenso ist

$$g(z) := \prod_{k=1}^{n} \theta_1(z - b_k)$$

eine normalisierte Thetafunktion mit den Nullstellen $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}/\Lambda$ und dem Automorphie-Verhalten

$$g(z+\tau) = (-1)^n g(z) e^{-2\pi i n z} e^{2\pi i B} \quad \text{mit } B := b_1 + \ldots + b_n.$$

Nach Voraussetzung gilt $A \equiv B \bmod \Lambda$. Indem man nötigenfalls b_1 durch einen anderen Repräsentanten modulo Λ ersetzt, darf man sogar annehmen, dass $A = B$ in $\mathbb{C}$. Dann haben $f(z)$ und $g(z)$ dasselbe Automorphie-Verhalten und $F(z) := f(z)/g(z)$ ist die gesuchte doppelt-periodische meromorphe Funktion.

4.11. Divisoren, Picard-Gruppe.

Wir wollen die Aussage des Abelschen Theorems noch anders interpretieren.

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Unter der Divisoren-Gruppe $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ versteht man die freie abelsche Gruppe über $\mathbb{C}/\Lambda$. Das bedeutet folgendes: Jedem Element $P \in \mathbb{C}/\Lambda$ ist ein Element $[P] \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ zugeordnet. Die Menge aller $[P]$ bildet eine Basis der

Divisoren-Gruppe, d.h. die Elemente $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$, genannt *Divisoren*, sind endliche ganzzahlige Linear-Kombinationen der Basiselemente $[P]$:

$$D = \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P[P], \qquad n_P \in \mathbb{Z}, \quad \text{nur endlich viele } n_P \neq 0.$$

Ist $D' = \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} m_P[P] \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ ein weiterer Divisor, so gilt $D = D'$ genau dann, wenn $n_P = m_P$ für alle $P \in \mathbb{C}/\Lambda$. Die Summe $D + D'$ ist definiert durch

$$D + D' = \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} (n_P + m_P)[P].$$

Es ist klar, dass damit $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$ eine (additive) Gruppe wird. Das Nullelement ist der Divisor, dessen sämtliche Koeffizienten n_P verschwinden. Natürlich kann man Summanden mit Koeffizienten $n_P = 0$ einfach weglassen, so dass ein typischer Divisor auch so geschrieben werden kann:

$$D = \sum_{j=1}^{k} n_j[P_j], \quad P_j \in \mathbb{C}/\Lambda,\ n_j \in \mathbb{Z}.$$

Der Grad eines Divisors $D = \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P[P]$ ist definiert durch

$$\deg(D) := \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P.$$

Dies liefert einen Gruppen-Homomorphismus

$$\deg : \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda) \to \mathbb{Z};$$

sein Kern wird mit $\mathrm{Div}_0(\mathbb{C}/\Lambda)$ bezeichnet.

Es bezeichne $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda)$ den Körper aller bzgl. Λ doppelt-periodischen meromorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ und $\mathcal{M}^*(\mathbb{C}/\Lambda) := \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda) \smallsetminus \{0\}$ seine multiplikative Gruppe. Für jedes Element $f \in \mathcal{M}^*(\mathbb{C}/\Lambda)$ ist sein Divisor $\mathrm{div}(f)$ wie folgt definiert:

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P[P],$$

mit

$$n_P := \begin{cases} k, & \text{falls } f \text{ in } P \text{ eine Nullstelle } k\text{-ter Ordnung hat,} \\ -k, & \text{falls } f \text{ in } P \text{ einen Pol } k\text{-ter Ordnung hat,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Divisoren von Funktionen $f \in \mathcal{M}^*(\mathbb{C}/\Lambda)$ heißen *Hauptdivisoren* (engl. principal divisors). Offensichtlich gilt für das Produkt zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{M}^*(\mathbb{C}/\Lambda)$

$$\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g),$$

man hat also einen Homomorphismus von der multiplikativen Gruppe $\mathcal{M}^*(\mathbb{C}/\Lambda)$ in die additive Gruppe der Divisoren

$$\mathrm{div} : \mathcal{M}^*(\mathbb{C}/\Lambda) \to \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda).$$

Die Menge aller Hauptdivisoren bildet also eine Untergruppe von $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)$, die wir mit $\mathrm{Div}_{\mathrm{pr}}(\mathbb{C}/\Lambda)$ bezeichnen. Da eine Funktion $f \in \mathcal{M}^*(\mathbb{C}/\Lambda)$ ebensoviele Nullstellen wie Pole hat, gilt sogar $\mathrm{Div}_{\mathrm{pr}}(\mathbb{C}/\Lambda) \subset \mathrm{Div}_0(\mathbb{C}/\Lambda)$. Wir definieren nun einen Homomorphismus

$$\mathrm{sum} : \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda) \to \mathbb{C}/\Lambda$$

durch

$$\mathrm{sum}\Big(\sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P[P]\Big) := \sum_{P \in \mathbb{C}/\Lambda} n_P \cdot P.$$

Dabei ist die letzte Summe bzgl. der additiven Gruppenstruktur in $\mathbb{C}/\Lambda$ zu bilden.

Das Abelsche Theorem (Satz 4.10) lässt sich nun so aussprechen:

4.12. Satz. *Ein Divisor $D \in \mathrm{Div}_0(\mathbb{C}/\Lambda)$ ist genau dann ein Hauptdivisor, wenn $\mathrm{sum}(D) = 0 \in \mathbb{C}/\Lambda$. Dies bedeutet, dass die folgende Sequenz (additiver) abelscher Gruppen exakt ist:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Div}_{\mathrm{pr}}(\mathbb{C}/\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Div}_0(\mathbb{C}/\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{sum}} \mathbb{C}/\Lambda \to 0.$$

Man definiert die *Picard-Gruppen* $\mathrm{Pic}(\mathbb{C}/\Lambda)$ und $\mathrm{Pic}_0(\mathbb{C}/\Lambda)$ als Quotienten

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}(\mathbb{C}/\Lambda) &:= \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Lambda)/\mathrm{Div}_{\mathrm{pr}}(\mathbb{C}/\Lambda), \\ \mathrm{Pic}_0(\mathbb{C}/\Lambda) &:= \mathrm{Div}_0(\mathbb{C}/\Lambda)/\mathrm{Div}_{\mathrm{pr}}(\mathbb{C}/\Lambda). \end{aligned}$$

Damit erhält man aus Satz 4.12

4.13. Corollar. *Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann induziert die Abbildung*

$$\mathrm{sum} : \mathrm{Div}_0(\mathbb{C}/\Lambda) \to \mathbb{C}/\Lambda$$

einen Gruppen-Isomorphismus

$$\mathrm{Pic}_0(\mathbb{C}/\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}/\Lambda.$$