Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2017/18
6. Dez. 2017

Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Übungsblatt 7

Aufgabe 25

Es seien $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ und $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ zwei Dirichletreihen.
Für $s = s_0$ seien beide Reihen konvergent, die Reihe $f(s_0)$ sogar absolut. Man zeige, dass die Produktreihe $f(s)g(s)$ im Punkt $s = s_0$ konvergiert.

Hinweis. Man zeige zunächst, dass es genügt, den Fall $s_0 = 0$ und $g(s_0) = 0$ zu behandeln.

Aufgabe 26

Sei $m \geqslant 2$ eine natürliche Zahl. Ein *Dirichlet-Charakter* modulo m ist eine Abbildung $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\chi(n_1) = \chi(n_2)$, falls $n_1 \equiv n_2 \bmod m$.

(ii) $\chi(n) \neq 0$ genau dann, wenn $\gcd(n, m) = 1$.

(iii) $\chi(k\ell) = \chi(k)\chi(\ell)$ für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Die *Dirichletsche L-Reihe* zum Charakter χ ist definiert als

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Man beweise:

a) Die Reihe konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut, stellt also eine in der Halbebene $H(1) := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ holomorphe Funktion dar.

b) Der *Hauptcharakter* $\chi_{0,m}$ modulo m ist definiert durch $\chi_{0,m}(n) = 1$ für alle n mit $\gcd(n, m) = 1$. Es gilt

$$L(s, \chi_{0,m}) = \prod_{p|m} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)\, \zeta(s).$$

Das Produkt ist dabei über alle Primteiler von m zu erstrecken.

c) Für jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ konvergiert die Reihe $L(s, \chi)$ sogar für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$.
Anleitung. Man beweise dazu $\sum_{n \leqslant x} \chi(n) = O(1)$.

Aufgabe 27 (Fortsetzung von Aufgabe 26)

Für einen beliebigen Dirichlet-Charakter χ modulo m gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$

a) $$\frac{1}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}.$$

b) $$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}.$$

c) $$\log L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)\chi(n)}{n^s}, \quad \text{wobei} \quad \Lambda_1(n) = \begin{cases} 1/k, & \text{falls } n = p^k,\ p \text{ prim},\ k \geqslant 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d) $$\log L(s,\chi) = \sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s} + F(s), \quad \text{wobei } F(s) \text{ in } \{\mathrm{Re}(s) > \tfrac{1}{2}\} \text{ holomorph ist.}$$

Aufgabe 28 (Fortsetzung von Aufgabe 27)

Sei speziell $m = 4$. Man beweise:

a) Es gibt genau einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ. Für diesen gilt

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ +1, & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 4, \\ -1, & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

b) $$L(1,\chi) = \frac{\pi}{4}.$$

c) $$\sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p)}{p} = O(1).$$

d) $$\lim_{x\to\infty} \Bigg(\sum_{\substack{p \equiv 1 \bmod 4 \\ p \leqslant x}} \frac{1}{p} \Bigg) \Bigg/ \Bigg(\sum_{\substack{p \equiv 3 \bmod 4 \\ p \leqslant x}} \frac{1}{p} \Bigg) = 1.$$