

Einführung in die Zahlentheorie Übungsblatt 9

Aufgabe 33

Sei $n \geq 3$ eine ungerade natürliche Zahl. Man beweise folgende Gleichheit von Jacobi-Symbolen:

$$\left(\frac{5}{2^n - 1}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right).$$

Aufgabe 34

Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 3 \pmod{4}$ und a quadratischer Rest modulo p . Man zeige:

- Das Element $x := a^{(p+1)/4}$ ist Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$.
- Das Element x ist ebenfalls quadratischer Rest modulo p .

Aufgabe 35

Sei $m \geq 3$ ungerade. Man leite den 2. Ergänzungssatz für das Jacobi-Symbol,

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{(m^2-1)/8},$$

aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz und dem 1. Ergänzungssatz her.

Hinweis. $\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2-m}{m}\right) = \left(\frac{-1}{m}\right) \left(\frac{m-2}{m}\right).$

Aufgabe 36

Sei $(f_n)_{n \geq 0}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Man zeige:

- Für alle $n \geq 0$ gilt

$$f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

- Sei q eine Primzahl und $m := q - \left(\frac{5}{q}\right)$. Dann folgt $q \mid f_m$.

- Sei p prim und $q > 5$ ein Primteiler von f_p . Dann gilt

$$p \mid q - \left(\frac{5}{q}\right).$$
