Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

SS 2012
24. April 2012

Elliptische Kurven
Übungsblatt 1

Aufgabe 1 Seien $f(X_0, X_1, X_2), g(X_0, X_1, X_2) \in k[X_0, X_1, X_2]$ zwei Polynome über dem Körper k in den Unbestimmten X_0, X_1, X_2. Man beweise:
Ist das Produkt

$$F(X_0, X_1, X_2) := f(X_0, X_1, X_2)g(X_0, X_1, X_2)$$

homogen, so sind auch die Faktoren $f(X_0, X_1, X_2)$ und $g(X_0, X_1, X_2)$ homogen.

Aufgabe 2 Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und

$$f_4(X) = \sum_{i=0}^{4} a_i X^i \in k[X], \quad a_4 = 1,$$

ein Polynom 4-ten Grades mit paarweise verschiedenen Nullstellen.

a) Man zeige: Das Polynom $F(X, Y) := Y^2 - f_4(X) \in k[X, Y]$ ist irreduzibel.

b) Sei $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ die projektiv-algebraische Kurve mit affiner Gleichung

$$Y^2 = f_4(X).$$

Man bestimme alle Singularitäten der Kurve C.

Aufgabe 3* Sei $f_4(X) \in k[X]$ ein Polynom 4-ten Grades wie in Aufgabe 2. Man zeige:
Es gibt ein Polynom 3-ten Grades $f_3(X) \in k[X]$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen und einen Körper-Isomorphismus

$$k(X)[\sqrt{f_4(X)}] \cong k(X)[\sqrt{f_3(X)}].$$

Aufgabe 4

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 3$ und $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ die Kurve mit der Gleichung

$$X_1^3 + X_2^3 = X_0^3.$$

Man bestimme eine projektiv-lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{P}^2(k) \to \mathbb{P}^2(k)$, so dass die Kurve $C_1 := \Phi(C)$ durch eine Gleichung in Normalform

$$X_0 X_2^2 = X_1^3 + a X_0^2 X_1 + b X_0^3$$

gegeben wird.