

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven Übungsblatt 2

Aufgabe 5

a) Man zeige für die Weierstraßsche \wp -Funktion zum Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - 30G_4(\Lambda).$$

b) Durch Betrachtung der Laurent-Entwicklungen von \wp'' und \wp^2 um den Nullpunkt beweise man

$$7G_8(\Lambda) = 3G_4(\Lambda)^2.$$

Aufgabe 6

Sei \wp die Weierstraßsche \wp -Funktion zum Gitter $\Lambda := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$.

a) Man zeige: $\wp(iz) = -\wp(z)$.

b) Man beweise, dass \wp im Punkt $z_0 := \frac{1}{2}(1 + i)$ eine Nullstelle 2. Ordnung hat.

Aufgabe 7

Seien $\Lambda := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ und \wp wie in Aufgabe 6 und

$$F(z) := \wp((1 + i)z).$$

a) Man zeige, dass F doppelt-periodisch bzgl. Λ ist.

b) Man bestimme alle Nullstellen und Polstellen von F in \mathbb{C}/Λ .

c) Man drücke F als rationale Funktion von \wp aus.

Aufgabe 8

Sei $\tau \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im}(\tau) > 0$ und $\Lambda := \mathbb{Z}\pi + \mathbb{Z}\tau$. Man zeige, dass die Reihe

$$F(z) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sin^2(z + m\tau)}$$

gegen eine bzgl. Λ doppelt-periodische gerade Funktion konvergiert und drücke F durch die Weierstraßsche \wp -Funktion zum Gitter Λ aus.

Abgabetermin: Mittwoch, 10. November 2010, 14 Uhr