

## Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven Übungsblatt 1

### Aufgabe 1

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  eine nicht-konstante meromorphe Funktion. Ein Element  $\omega \in \mathbb{C}$  heißt Periode von  $f$ , falls

$$f(z + \omega) = f(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Man zeige:

- a) Die Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  aller Perioden von  $f$  ist eine Untergruppe von  $(\mathbb{C}, +)$ . Diese Untergruppe ist diskret, d.h. es gibt eine Nullumgebung  $U \subset \mathbb{C}$ , so dass  $\Omega \cap U = \{0\}$ .
- b) Ist  $G \subset \mathbb{C}$  eine diskrete Untergruppe, so tritt eine der folgenden Möglichkeiten ein:
  - i)  $G = \{0\}$ ,
  - ii)  $G = \mathbb{Z}\omega$  mit  $\omega \in \mathbb{C}^*$ ,
  - iii)  $G = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  mit reell linear unabhängigen  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ , (d.h.  $G$  ein Gitter).

### Aufgabe 2

Sei  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$  ein Gitter und  $\Lambda' := \mathbb{Z} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \mathbb{Z} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ .

- a) Man zeige:  $\Lambda \subset \Lambda'$  und die Quotienten-Gruppe  $\Lambda'/\Lambda$  hat die Ordnung 2.
- b) Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_1$  eine bzgl. des Gitters  $\Lambda$  doppelt-periodische meromorphe Funktion und

$$g(z) := f(z) + f\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right).$$

Man zeige, dass  $g$  doppelt-periodisch bzgl. des Gitters  $\Lambda'$  ist.

### Aufgabe 3

Sei  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ein Gitter und  $R_\Lambda := \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha\Lambda \subset \Lambda\}$ . Man zeige

- a)  $R_\Lambda$  ist ein kommutativer Ring mit Einselement.
- b)  $R_\Lambda \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ .
- c) Für die Gruppe  $R_\Lambda^*$  der Einheiten (invertierbaren Elemente) von  $R_\Lambda$  gilt

$$R_\Lambda^* = \{\alpha \in \mathbb{C}^* : \alpha\Lambda = \Lambda\}.$$

### Aufgabe 4

Man bestimme  $R_{\Lambda_k}$  und  $R_{\Lambda_k}^*$  (vgl. Aufgabe 3) für folgende Gitter:

$$\Lambda_1 := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i, \quad \Lambda_2 := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i\sqrt{2}, \quad \Lambda_3 := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i\sqrt[3]{2}.$$

---

**Abgabetermin:** Mittwoch, 27. Oktober 2010, 14 Uhr