Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2008/09
9. Januar 2009

Die Riemannsche Zeta-Funktion

Übungsblatt 6

Aufgabe 21

Man zeige: Für $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ gilt

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_0^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\,dx.$$

Aufgabe 22

Für die Anzahl $N(T)$ der nicht-trivialen Nullstellen ϱ der Zeta-Funktion mit $0 < \mathrm{Im}(\varrho) \leqslant T$ beweise man

$$N(T+1) - N(T) = O(\log T).$$

Aufgabe 23

Seien $\varrho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n \geqslant 1$, die Nullstellen der Zeta-Funktion in der oberen Halbebene, nach wachsendem Imaginärteil γ_n geordnet. Man beweise die asymptotische Beziehung

$$|\varrho_n| \sim \gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}.$$

Aufgabe 24

Man zeige:

$$F(t) := (\tfrac{1}{4} + t^2)\,\pi^{-it/2}\,\Gamma(\tfrac{1}{4} + \tfrac{i}{2}\,t)\,\zeta(\tfrac{1}{2} + it).$$

ist eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe gerade Funktion der komplexen Variablen t. Für reelles t ist $F(t)$ reell und die reellen Nullstellen t von F stehen in bijektiver Beziehung zu den Nullstellen $\frac{1}{2} + it$ der Zeta-Funktion auf der kritischen Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 21. Januar 2009, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock

Klausur am Freitag, 30. Januar 2009, 14 hct