MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. O. FORSTER

WS 2008/09
29. Nov. 2008

Die Riemannsche Zeta-Funktion

Übungsblatt 4

Aufgabe 13

Man leite aus der asymptotischen Beziehung $p_n \sim n \log n$ den Primzahlsatz

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

her.

Aufgabe 14

Man beweise für festes $\varepsilon > 0$ die asymptotische Beziehung

$$\pi((1+\varepsilon)x) - \pi(x) \sim \frac{\varepsilon x}{\log x}.$$

Aufgabe 15 Man zeige:

a) Für alle $m \geqslant 1$ gilt

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^m t} = O\Big(\frac{x}{\log^m x}\Big).$$

b) Für alle $m \geqslant 2$ gilt

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{(k-1)!\, x}{\log^k x} + (m-1)! \int_2^x \frac{dt}{\log^m t} + C_m.$$

Dabei ist C_m eine (von x unabhängige) Konstante.

Aufgabe 16 Man beweise für alle ganzen Zahlen $m \geqslant 2$

a) $$\prod_{k=1}^{m-1} (1 - e^{2\pi i k/m}) = m,$$

b) $$\prod_{k=1}^{m-1} \sin\Big(\frac{k\pi}{m}\Big) = \frac{m}{2^{m-1}},$$

c) $$\prod_{k=1}^{m-1} \Gamma\Big(\frac{k}{m}\Big) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{m-1}}{m}},$$

d) $$\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\Big(\frac{z+k}{m}\Big) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-z}\, \Gamma(z).$$

Abgabetermin: Mittwoch, 10. Dezember 2008, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock