Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2008/09
31. Okt. 2008

Die Riemannsche Zeta-Funktion

Übungsblatt 2

Aufgabe 5

Man beweise:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+it}}$ divergiert für alle $t \in \mathbb{R}$.

b)* $\displaystyle\sum_{p} \frac{1}{p^{1+it}}$ konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}^*$.

Aufgabe 6

Sei

$$f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine Dirichlet-Reihe, die für $s = 0$ divergiert. Man beweise folgende Formel für die bedingte Konvergenz-Abszisse:

$$\sigma_c(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log |A(N)|}{\log N}, \quad \text{wobei } A(N) := \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Aufgabe 7

a) Für die Möbius-Funktion beweise man

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = |\mu(n)|.$$

Dabei wird über alle quadratischen Teiler von n summiert.

b) Man zeige für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}.$$

Aufgabe 8

Die Liouville-Funktion $\lambda : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\lambda(n) = (-1)^{k_1+\ldots+k_r} \quad \text{für } n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}.$$

Man zeige:

a) $$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = m^2 \text{ ein Quadrat,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

c)** Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

konvergiert sogar für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

Mit einem Stern * versehene Aufgaben sind nicht obligatorisch; ihre Lösung ergibt Extra-Punkte.

Abgabetermin: Mittwoch, 12. November 2008, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock