Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2008/09
22. Okt. 2008

Die Riemannsche Zeta-Funktion

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 Man beweise

$$\prod_p \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) = 0,$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen p zu bilden ist.

Aufgabe 2 Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ sei

$$P(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}.$$

Für $k \geqslant 1$ ist also die Funktion $s \mapsto P(ks)$ in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 1/k$ holomorph.

Man beweise:

a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} P(ks)$ konvergiert geichmäßig in jeder Halbebene $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2} + \delta$, $\delta > 0$.

b) In der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\log \zeta(s) = P(s) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} P(ks).$$

Aufgabe 3 Sei

$$g(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} \mp \ldots$$

a) Man zeige: Die Reihe für $g(s)$ konvergiert in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.

b) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ beweise man die Formel

$$g(s) = \prod_p \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1},$$

wobei

$$\chi(n) := \begin{cases} 0 & \text{für } n \equiv 0 \bmod 2, \\ 1 & \text{für } n \equiv 1 \bmod 4, \\ -1 & \text{für } n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

---

b.w.

Aufgabe 4

Für reelles $x > 0$ bezeichne $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leqslant x$ und

$$\pi_1(x) := \sum_{n \leqslant x} \Lambda_1(n),$$

wobei

$$\Lambda_1(n) := \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{für } n = p^m,\ p \text{ prim},\ m \geqslant 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beweise:

a) $\displaystyle \pi_1(x) = \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{m}\, \pi(x^{1/m}).$

b) Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$\log \zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\pi_1(x)}{x^s} \cdot \frac{dx}{x} = s \int_1^\infty \frac{\pi(y)}{y^s - 1} \cdot \frac{dy}{y}.$$

Abgabetermin: Mittwoch, 29. Oktober 2008, 14 Uhr, Übungskasten im 1. Stock