

**Primzahlen. Eine Einführung in die Zahlentheorie**  
**Klausur**

**Aufgabe 1**

- a) Auf wieviele Nullen endet  $200!$  in Dezimaldarstellung?
- b) Man bestimme die größte Primzahl  $p$  mit  $p^3 \mid 200!$ .

**Aufgabe 2**

Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Man zeige:

- a) Die Zahl  $7^n - 1$  ist stets durch 6 teilbar.
- b) Die Zahl  $(7^n - 1)/6$  ist höchstens dann prim, wenn  $n$  prim ist.

**Aufgabe 3**

Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Man zeige:

- a) Für jeden ungeraden Primteiler  $q \mid n^2 + 1$  gilt  $q \equiv 1 \pmod{4}$ .
- b) Für jeden ungeraden Primteiler  $q \mid n^4 + 1$  gilt  $q \equiv 1 \pmod{8}$ .

**Aufgabe 4**

Sei  $p$  eine Primzahl mit  $3 \mid p - 1$  und  $a$  eine ganze Zahl mit  $p \nmid a$ . Man beweise:

Die Kongruenz  $x^3 \equiv a \pmod{p}$  ist genau dann lösbar, wenn

$$a^{(p-1)/3} \equiv 1 \pmod{p}.$$

---

Arbeitszeit: 60 Minuten