MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster

SS 2001
9. 7. 2001
Blatt 11

Übungen zu: Unendliche Folgen und Reihen

37) Die Cotangens-Funktion ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ definiert durch

$$\cot x := \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Man bestimme die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

38) Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante mit $0 < a < 1$. Man berechne die Ableitung der für $x > 0$ definierten Funktionen

a) $f_0(x) := \log(2 - a^x)$

b) $f_1(x) := \log(2 - a^{1/x})$

39) Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante mit $0 < a < 1$. Gegeben sei die Funktion

$$F(x) := \left(2 - a^{1/x}\right)^x, \quad x > 0.$$

Man untersuche, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimme gegebenenfalls ihren Wert:

a) $\lim\limits_{x\searrow 0} F(x)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$

Hinweis: Man betrachte die Funktion $\log F(x)$.

40) a) Man beweise

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} = \log 2$$

indem man die obige Summe als Riemannsche Summe für das Integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$ interpretiere.

b) Man folgere hieraus (unter Verwendung von Aufgabe 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

Abgabetermin: Dienstag, 17. Juli 2001, 14:10 Uhr (Übungskasten vor der Bibliothek).