MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster

SS 2001
2. 7. 2001
Blatt 10

Übungen zu: Unendliche Folgen und Reihen

33) Für $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \qquad \sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),$$

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Man berechne die Ableitungen dieser Funktionen.

34) Für $z \in \mathbb{C}$ ist die Sinus- und Cosinus-Funktion definiert durch

$$\cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \qquad \sin(z) := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

Man zeige für $x, y \in \mathbb{R}$

a) $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

b) $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

35) a) Man zeige, daß die hyperbolische Sinusfunktion $\sinh x$ für $x \in \mathbb{R}$ monoton wachsend ist und $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet.

b) Man beweise die Gleichung für die Umkehrfunktion $\operatorname{Ar}\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{Ar}\sinh(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

c) Man berechne die Ableitung von $\operatorname{Ar}\sinh$.

36) Man beweise für $x \in \mathbb{R}$ durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = P_n(x)\, e^{-x^2}$$

wobei P_n ein Polynom n-ten Grades in x ist, und gebe P_0, P_1, P_2 explizit an.

Abgabetermin: Dienstag, 10. Juli 2001, 14:10 Uhr (Übungskasten vor der Bibliothek).