MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster

SS 2001
11. 6. 2001
Blatt 8

Übungen zu: Unendliche Folgen und Reihen

Dieses Übungsblatt dient der Vorbereitung auf die Klausur am 21. Juni und muss nicht abgegeben werden

Besprechung des 7. Übungsblatts am Dienstag, 19.6., 15.10-16.45 in E05

a) Man beweise durch vollständige Induktion

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad n \geq 1$

2) $\binom{n+1}{k+1} = \sum\limits_{m=k}^{n} \binom{m}{k}, \qquad n, k \in \mathbb{N}, \quad n \geq k$

b) Man zeige

1) $\dfrac{n^2}{2^n} < \dfrac{1}{n}, \qquad$ für $n \geq 10$

2) $\max(x, y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right) \qquad$ für $x, y \in \mathbb{R}$

c) Man zeige:

1) $4xy \leq (x+y)^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

2) $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$ für $x, y > 0$.

d) Man stelle fest, welche der folgenden fünf Implikationen für $x, y \in \mathbb{R}$ allgemeingültig sind (Beweis oder Gegenbeispiel)

1) $xy \geq 1 \iff x \geq 1$ und $y \geq 1$

2) $xy \geq 1$ und $x, y \leq 1 \iff x = y = 1$

3) $x + y = 2 \implies xy \leq 1$.

b.w.

e) Man zeige die Konvergenz der folgenden Reihen

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n}{(n+2)^2}$

f) Man bestimme ein $N \in \mathbb{N}$, so dass die folgende Abschätzung gilt

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \;\leq\; 10^{-6}$$

g) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := 1, \qquad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}$$

Man beweise ihre Konvergenz, indem man zunächst zeige, dass sie monoton wächst, und bestimme ihren Grenzwert.

h) Man untersuche, welche der folgenden Limites existieren und bestimme gegebenenfalls ihren Wert:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{3n}\right)^n$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{3n}$

3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

i) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n := \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad b_n := \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}$