MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster

SS 2001
5. 6. 2001
Blatt 7

Übungen zu: Unendliche Folgen und Reihen

25) Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Eine zweite Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$A_0 := \frac{1}{2}a_0\,, \qquad A_k := \frac{1}{2}a_{2k-2} + a_{2k-1} + \frac{1}{2}a_{2k}, \qquad k \geq 1$$

Man zeige: Konvergiert eine der beiden Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert die andere Reihe ebenfalls gegen a.

26) Gegeben sei die Darstellung von π durch die Leibnizsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots \qquad (*)$$

Mit Hilfe von $(*)$ und Aufgabe 25 beweise man, dass sich π auch durch die folgende Reihe darstellen lässt

$$\pi = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{(4k-3)(16k^2-1)}$$

27) Man vergleiche die Konvergenz-Geschwindigkeit der beiden Reihen

$$\text{(i)} \qquad \pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\text{(ii)} \qquad \pi = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{(4k-3)(16k^2-1)}$$

indem man für beide Reihen die Zahl der Glieder bestimme, die nötig sind, um den Fehler kleiner als 10^{-m} zu machen (eine grobe Abschätzung ist ausreichend!).

Fleißaufgabe (ohne Bewertung): Schreiben Sie ein Computer-Programm für die Auswertung der Partialsummen der Reihen (i) und (ii).

28) a) Man beweise mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes, dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ gilt

$$(1+x)^n > \frac{n^2}{4}x^2 \qquad \text{für } n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$$

b) Man folgere hieraus

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \qquad \text{für } n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$$

c) Man beweise

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Abgabetermin: Freitag, 15. Juni 2001, 9:10 Uhr (Übungskasten vor der Bibliothek).