MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster

SS 2001
28. 5. 2001
Blatt 6

Übungen zu: Unendliche Folgen und Reihen

21) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}, \qquad (2)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^4-11n^2+3}, \qquad (3)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}.$$

22) Seien a_n für $n \geq 1$ reelle Zahlen mit $a_1 = 1$ und $|a_n| \leq 1$ für $n \geq 2$. Man zeige:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

b) Es gilt $f(x) \neq 0$ für $0 < |x| < \frac{1}{2}$.

c) Man berechne $f(\frac{1}{2})$ mit einem absoluten Fehler $< 10^{-7}$ für den Fall, dass $a_n = 1$, falls n eine Quadratzahl, und $a_n = 0$ sonst.

23) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.

a) Man zeige an einem Beispiel, dass im Allgemeinen die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n$$

nicht konvergiert.

b) Wie ist die Situation, wenn man zusätzlich voraussetzt, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert?

24) Man betrachte folgende Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2} \;+\; \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)-\frac{1}{8}+\ldots$$
$$+\;\left(\frac{1}{2k-3}+\frac{1}{2k-1}\right)-\frac{1}{k}+\ldots.$$

Man zeige unter Benutzung von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$, dass diese Umordnung gegen $\frac{3}{2}\log(2)$ konvergiert.

Anleitung. Man verwende die Summen

$$S_k := \sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Abgabetermin: Donnerstag, 7. Juni 2001, 11:10 Uhr (Übungskasten vor der Bibliothek).