MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster

SS 2001
14. 5. 2001
Blatt 4

Übungen zu: Unendliche Folgen und Reihen

13) Man stelle fest, welche der folgenden Implikationen für $x, a, b \in \mathbb{R}$ allgemein gültig bzw. i.a. falsch sind. Man beweise die allgemeingültigen Aussagen und gebe für die übrigen Aussagen ein Gegenbeispiel an:

a) $|x-a| < b \implies x > a - 2b$

b) $ab > 1$ und $a < 1 \implies b > 1$

c) $x\,(x-2a^2) > 0 \iff |x-a^2| > a^2$

14) Man beweise für $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

15) Man zeige die Konvergenz und bestimme den Grenzwert der rekursiv definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1\,,$$
$$a_n := \tfrac{1}{3}\,(2a_{n-1} + a_{n-2}), \quad n \geq 2\,.$$

Hinweis: Man untersuche die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Differenzen, $b_n := a_n - a_{n-1}$, $n \geq 1$.

16) Man bestimme den Wert des unendlichen Produkts

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

S3) Dritte Sternaufgabe
Seien $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, nicht-negative reelle Zahlen. Man beweise die folgende Äquivalenz

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_n) = \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$$

Abgabetermin: Freitag, 25. Mai 2001, 9:10 Uhr (Übungskasten vor der Bibliothek).