MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster

SS 2001
9. 7. 2001
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung Abelsche Varietäten

Aufgabe 9

Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung des topologischen Raumes X und $\mathfrak{V}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$. Weiter sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X.

a) Man zeige, dass die natürliche Abbildung $\tau^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ injektiv ist.

b) Gilt $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \in I$, so ist $\tau^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ sogar bijektiv.

Aufgabe 10

a) Sei X eine Mannigfaltigkeit (mit abzählbarer Topologie) und seien Y_1, Y_2 offene Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften: (i) $Y_1 \cup Y_2 = X$, (ii) $Y_1 \cap Y_2$ ist einfach zusammenhängend, (iii) jedes (komplexe) Geradenbündel auf Y_i ist trivial ($i = 1, 2$). Man zeige, dass dann jedes Geradenbündel auf X trivial ist.

b) Man zeige, dass auf folgenden topologischen Räumen jedes $\mathbb{C}$-Geradenbündel trivial ist:

(i) S^1 und $S^1 \times I$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist,

(ii) $X := (S^1 \times S^1) \setminus \{P_0\}$ für einen Punkt $P_0 \in S^1 \times S^1$.

Aufgabe 11

Sei $\Lambda \in M(n \times 2n, \mathbb{C})$ eine Matrix, deren $2n$ Spalten reell linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{C}^n$ sind. Mit Λ werde gleichzeitig das von den Spalten aufgespannte Gitter im $\mathbb{C}^n$ bezeichnet.

a) Man zeige, dass die $2n \times 2n$-Matrix $\binom{\Lambda}{\overline{\Lambda}}$ invertierbar ist.

b) Seien $A_1, A_2 \in M(2n \times n, \mathbb{C})$ Matrizen mit $(A_1, A_2)\binom{\Lambda}{\overline{\Lambda}} = E_{2n}$. Man zeige, dass sich jede $\mathcal{C}^\infty$-Funktion f auf dem Torus $X := \mathbb{C}^n/\Lambda$ in eine Fourier-Reihe

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^{2n}} a_m(z) e^{2\pi i\langle m,(A_1 z + A_2 \overline{z})\rangle}$$

mit Koeffizienten $a_m \in \mathcal{C}^\infty(X)$ entwickeln lässt.

Aufgabe 12

a) Man zeige mittels Fourier-Entwicklung, dass jede $\overline{\partial}$-geschlossene (0,1)-Form $\sigma = \sum_{\nu=1}^n a_\nu d\overline{z}_\nu$ auf dem Torus $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ $\overline{\partial}$-cohomolog zu einer (0,1)-Form mit konstanten Koeffizienten ist.

b) Sei $\omega = \sum_{\nu,\mu=1}^n a_{\nu\mu} dz_\nu \wedge d\overline{z}_\mu$ eine d-geschlossenene (1,1)-Form auf dem Torus X mit $\int_X a_{\nu\mu} d\mathrm{Vol}_X = 0$ für alle ν, μ. Man zeige: Es gibt eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ mit

$$\omega = \partial\overline{\partial} f.$$

Blatt 3 Ende