MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster

SS 2001
14. 5. 2001
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung Abelsche Varietäten

Aufgabe 5

Sei Z die wie folgt definierte Teilmenge von $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1}$:

$$Z := \{((z_0 : \ldots : z_n), v) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1} : v \in \mathbb{C} \cdot (z_0, \ldots, z_n)\}.$$

a) Man zeige, dass Z eine $(n+1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1}$ ist. Vermöge der durch die Projektion auf den ersten Faktor induzierten Abbildung $\pi : Z \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ wird Z zu einem Geradenbündel über $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

b) Das so konstruierte Geradenbündel ist isomorph zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)$.

Aufgabe 6

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $a \in X$ ein vorgegebener Punkt. Man zeige: Es gibt eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit Y und eine eigentliche holomorphe Abbildung $\sigma : Y \to X$, so dass $A := \sigma^{-1}(\{a\})$ eine zu $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ isomorphe $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von Y ist, und die Einschränkung

$$\sigma : Y \smallsetminus A \longrightarrow X \smallsetminus \{a\}$$

eine biholomorphe Abbildung ist. (Die Konstruktion von Y aus X heißt Hopf'scher Sigma-Prozess)

Aufgabe 7

Sei $\pi : V \to X$ ein holomorphes Vektorraumbündel vom Rang r über der n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X und sei $f : Y \to X$ eine holomorphe Abbildung einer m-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit Y in X. Sei

$$W := \{(y, v) \in Y \times V : f(y) = \pi(v)\}.$$

Man zeige, dass W eine $(m+r)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $Y \times V$ ist, die vermöge der durch die Projektion $Y \times V \to Y$ induzierten Abbildung $\varpi : W \to Y$ zu einen Vektorraumbündel vom Rang r über Y wird. Man schreibt $W =: f^*V$ und nennt f^*V das *Pullback* von V mittels f.

Aufgabe 8

Sei $f : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ definiert durch $f(x_0 : x_1) := (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2)$. Man zeige, dass das Bild $f(\mathbb{P}_1)$ eine glatte Quadrik in $\mathbb{P}_2$ ist und das Pullback $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ isomorph zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$ ist.

Blatt 2 Ende