Übungen zur Vorlesung Abelsche Varietäten

Aufgabe 1

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ das (nicht-leere) Konvergenzgebiet einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} c_k z^k$, d.h. das Innere der Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}^n$, für die die Reihe konvergiert. Unter dem logarithmischen Bild $\ell(G) \subset \mathbb{R}^n$ versteht man die Menge

$$\ell(G) := \{(\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|) : (z_1, \ldots, z_n) \in G \cap (\mathbb{C}^*)^n\}.$$

Man beweise, dass $\ell(G)$ konvex ist.

Aufgabe 2

Seien N_1 und N_2 zwei Normen auf dem komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$, z.B.

$$N_1(z) = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}, \quad N_2(z) = (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}.$$

und $G_k := \{z \in \mathbb{C}^n : N_k(z) < 1\}$.

a) Man beweise, dass jede biholomorphe Abbildung $\Phi : G_1 \to G_2$ mit $\Phi(0) = 0$ linear ist.

b) Man folgere daraus, dass es für $n > 1$ keine biholomorphe Abbildung des n-dimensionalen Polyzylinders auf die Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$ gibt (Satz von Poincaré).

Aufgabe 3

Sei $B := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| \le 1\}$ die Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$, wobei $\|\,.\,\|$ die gewöhnliche Euklidische Norm sei (gleich Beispiel N_2 aus der vorherigen Aufgabe). Sei $\mathrm{SU}(1,n)$ die Menge aller Matrizen

$$A = (a_{\nu\mu})_{0 \le \nu,\mu \le n} \in \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C}) \quad \text{mit } A^* J_{1,n} A = J_{1,n}, \quad J_{1,n} := \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1).$$

(Dabei ist A^* die hermitesch konjugierte Matrix zu A).

Man zeige: Zu jeder biholomorphen Abbildung $\Phi : B \to B$ gibt es eine Matrix

$$A = (a_{\nu\mu})_{0 \le \nu,\mu \le n} \in \mathrm{SU}(1,n),$$

so dass $\Phi(z) = w$ mit

$$w_\nu = \frac{a_{\nu 0} + a_{\nu 1} z_1 + \ldots + a_{\nu n} z_n}{a_{00} + a_{01} z_1 + \ldots + a_{0n} z_n} \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Umgekehrt liefert jede Matrix $A \in \mathrm{SU}(1,n)$ eine biholomorhe Abbildung $B \to B$. Die Automorphismengruppe von B ist also isomorph zu $\mathrm{PSU}(1,n)$.

Aufgabe 4

Man bestimme die Automorphismengruppe des Polyzylinders

$$P := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < 1 \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}.$$