MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster
Dr. P. Schuster

Wintersemester
1998/99

Übungen zur Analysis I (MIA) Blatt 14

57. Man betrachte die Funktionen

$$\begin{aligned} &\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) &&\text{(sinus hyperbolicus)},\\ &\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) &&\text{(cosinus hyperbolicus)} \end{aligned}$$

und zeige

$$\begin{aligned} &\cosh x + \sinh x = e^x,\\ &\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,\\ &\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,\\ &\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y. \end{aligned}$$

58. Man zeige: Die Funktion sinh bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab; die Funktion cosh bildet $[0, +\infty[$ bijektiv auf $[1, +\infty[$ ab. Für die Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ar\,sinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{(Area sinus hyperbolicus)},\\ &\operatorname{Ar\,cosh}\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R} \quad \text{(Area cosinus hyperbolicus)} \end{aligned}$$

von sinh bzw. cosh gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Ar\,sinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\\ \operatorname{Ar\,cosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}). \end{aligned}$$

59. Man berechne die Ableitungen von sinh, cosh, Ar sinh und Ar sinh.

60. Man berechne die unbestimmten Integrale

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \quad (a > 0), \qquad \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx \quad (x > 0).$$

61. Man bestimme die Taylor-Entwicklung der Wurzelfunktion an der Stelle 2.

62. Man entscheide, für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x^\beta}\,dx$$

konvergent ist, und berechne gegebenenfalls seinen Grenzwert mit Hilfe der Γ-Funktion.

63. Für $a < b$ sei (f_n) eine monotone Folge stetiger Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Man zeige, daß die Konvergenz gleichmäßig ist.

64. Für $c < d$ sei (g_n) eine Folge monotoner Funktionen $[c, d] \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine stetige Funktion $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Man zeige, daß g monoton ist, und daß die Konvergenz gleichmäßig ist.

65. Es sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Strecken der Länge 1 in der Zeichenebene, deren Anfangspunkt bzw. Endpunkt auf der Abszisse bzw. Ordinate liegt, und die ganz im ersten Quadranten enthalten sind. Man berechne den Inhalt der von den Strecken aus $\mathcal{S}$ bestrichenen Fläche $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$.

Die Aufgaben dieses Blattes können nicht korrigiert und daher nicht abgegeben werden; eine Auswahl davon wird jedoch in der ersten Übung zur Analysis II im kommenden Sommersemester besprochen werden.

Erholsame Ferien und weiter viel Erfolg!