MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster
Dr. P. Schuster

Wintersemester
1998/99

Übungen zur Analysis I (MIA) — Blatt 11

45. Man skizziere den Graphen von

$$h :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\log x}{x},$$

bestimme die lokalen und globalen Extrema von h und untersuche h auf Monotonie sowie auf Konvexität bzw. Konkavität.

46. Man zeige:

(a) Zu jedem $x > e$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y \neq x$ und $x^y = y^x$; für dieses y gilt $1 < y < e$.

(b) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m < n$ und $m^n = n^m$, so ist $m = 2$ und $n = 4$.

47. Für $a < b$ sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]a, b[$ differenzierbar ist. Man zeige: Hat f' keine Nullstelle, so hat f' konstantes Vorzeichen.

Hinweis: Injektive stetige Funktionen auf Intervallen sind streng monoton.

48. Man skizziere den Graphen der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

und zeige, daß für alle $k \geq 0$ folgendes gilt:

(i) g ist k-mal differenzierbar mit $g^{(k)}(0) = 0$.

(ii) Es gibt ein Polynom P_k mit $g^{(k)}(x) = P_k(1/x) \cdot g(x)$ für alle $x \neq 0$.

(je 4)

Abgabe: Mittwoch, 10. Februar 1999, 9 Uhr, Übungskasten vor der Bibliothek