MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster
Dr. P. Schuster

Wintersemester
1998/99

Übungen zur Analysis I (MIA) Blatt 8

33. Man betrachte die Funktion zack : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 \cdot \left| x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2}$.

    (a) Man skizziere den Graphen von zack.

    (b) Man zeige, daß zack stetig ist.

    (c) Man zeige, daß zack periodisch von Periode 1 ist.

34. Es sei $D \subset \mathbb{R}$, und $L \geq 0$ eine reelle Zahl. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, wenn für alle $x, y \in D$

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

gilt.

    (a) Man zeige, daß jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

    (b) Man zeige, daß die Funktion zack von Aufgabe 33 Lipschitz-stetig ist.

    (c) * Man gebe ein Beispiel einer auf einem kompakten Intervall stetigen (also gleichmäßig stetigen) Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die nicht Lipschitz-stetig ist. (2*)

35. Es seien $a < b$ reelle Zahlen, und $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige, daß g genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x \searrow a} g(x), \quad \lim_{x \nearrow b} g(x)$$

existieren.

36. Es sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Man zeige: Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $a < 1$ streng monoton fallend. In beiden Fällen wird $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ abgebildet. Die Umkehrfunktion ${}^a\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (Logarithmus zur Basis a) ist stetig, und für alle $x > 0$ gilt

$${}^a\log x = \frac{\log x}{\log a}.$$

(je 4)

Abgabe: Mittwoch, 20. Januar 1999, 9 Uhr, Übungskasten vor der Bibliothek

Die zweite **Klausur** findet am Freitag, den 19. Februar 1999 von 11 bis 13 Uhr im Hörsaal 122 statt.