MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster
Dr. P. Schuster

Wintersemester
1998/99

Übungen zur Analysis I (MIA) — Blatt 7

25. Es seien

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \qquad (n \geq 1).$$

Man untersuche die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ auf Konvergenz.

26. Für

$$c_n = (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) \qquad (n \geq 1)$$

bestimme man $\liminf_{n\to\infty} c_n$ und $\limsup_{n\to\infty} c_n$.

27. Es seien $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(y_n)_{n\geq 0}$ Folgen reeller Zahlen. Man zeige

$$\sup_{n\geq 0} x_n + \inf_{n\geq 0} y_n \leq \sup_{n\geq 0}(x_n + y_n) \leq \sup_{n\geq 0} x_n + \sup_{n\geq 0} y_n.$$

28. Man zeige:

(a) Für alle $n \geq 0$ gilt: Die Menge aller Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ hat 2^n Elemente.

(b) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

29. Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

30. Man beweise folgende Verschärfung des Quotienten-Kriteriums von Raabe: Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen $\neq 0$ derart, daß es eine Konstante $c > 1$ gibt mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{c}{n} \qquad (n \geq 1),$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Man zeige, daß die Aussage für $c = 1$ nicht mehr gilt.

31. Man zeige, daß die Reihe $\sum' \frac{1}{n}$ konvergent ist, wobei $\sum'$ für die Summation über alle natürlichen Zahlen ≥ 1 stehe, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 1 nicht vorkommt.

32. Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Man zeige

$$(*) \qquad \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell \left(q^{\frac{1}{2}(3\ell^2+\ell)} + q^{\frac{l}{2}(3\ell^2-\ell)} \right)$$

einschließlich der Konvergenz beider Seiten wie folgt:

(a) Die Zahlen $c(k,n)$, $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$, seien rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} c(0,n) &= \delta_{0n}, \qquad (n \in \mathbb{Z}), \\ c(k,n) &= c(k-1,n) - c(k-1,n-k), \qquad (k \geq 1, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\prod_{m=1}^{k} (1 - q^m) = \sum_{n=0}^{\infty} c(k,n) q^n \qquad (k \geq 0).$$

(b) Für alle $n \geq 1$ gilt: $c(k,n)$ konvergiert für $k \to \infty$ gegen eine reelle Zahl $a(n)$ mit

$$a(n) = \begin{cases} (-1)^\ell & \text{falls } n = \frac{1}{2}(3\ell^2 \pm \ell) \text{ für ein } \ell \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Beide Seiten der Gleichung $(*)$ sind konvergent.

(je 4)

Sie haben die Wahl: Sie können sich auf die Standardaufgaben 25–28 beschränken, oder sich für die anspruchsvolleren Aufgaben 29–32 entscheiden. Die maximal erreichbare Punktzahl für Blatt 7 ist 20.

Abgabe: Mittwoch, 13. Januar 1999, 9 Uhr, Übungskasten vor der Bibliothek

Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!