mathe-lmu.de

Nr. 12 Juni 2005

Förderverein Mathematik in Wirtschaft, Universität und Schule an der Ludwig-Maximilians-Universität München e.V.

Karriere in der Hochfinanz - Seite 18

Sandspielen mit Perron-Frobenius - Seite 26

Liebe Leserinnen und Leser,

es macht uns jedes Mal wieder Spaß, bei der Vorbereitung eines neuen Heftes von mathe-lmu.de den Bogen zu spannen von Informationen zu Schülerprogrammen über unsere eigentliche Forschungs- und Lehrtätigkeit bis hin zu Artikeln über die Berufskarrieren unserer Absolventen. Dies lehrt uns, unsere Tätigkeit nicht etwa nur als Glasperlenspiel zu sehen, sondern eingebunden in sehr konkrete gesellschaftliche Aufgaben.

Dabei haben in diesen Heft reichlich außergewöhnliche Themen zu bieten, beginnend mit den internationalen Mathematik-Olympiaden und mit Schülern, die schon vor dem Abitur an regulären Universitätskursen teilnehmen, über eine neuartige Lehrveranstaltungsform bis hin zu einer Mathematikerkarriere auf dem globalen Spielfeld der Hochfinanz.

Dagegen halten wir uns in diesem Heft bei dem in der Öffentlichkeit intensiv diskutierten Thema der Reform der Universitäten absichtlich zurück, da hierbei die Konturen noch zu verschwommen sind, als dass wir für unser Institut schon Endgültiges berichten könnten.

Heinrich Steinlein

Titelbild: Auch hier arbeiten Mathematiker: Tradingfloor der Deutschen Bank in Frankfurt (siehe Artikel auf Seite 18)

Liebes Vereinsmitglied,

am 26. April konnten unser Förderverein und die Fakultät für Physik Herrn Dr. Roland Weinfurtner, Managing Director im Bereich Global Markets – OTC-Derivatives bei der Deutschen Bank AG (vgl. Seite 18) sowie Frau Audrey Herz vom Recruiting der Deutschen Bank begrüßen. Vor gut 100 Studierenden stellte Herr Dr. Weinfurtner die Geschäftsfelder der Deutschen Bank vor und schilderte seine Tätigkeit. Lebensnah beschrieb er Tagesablauf, Qualifikationen und Chancen. Das rege Interesse an der Veranstaltung spiegelte sich auch in den vielen Fragen der Teilnehmer wider. Weitere Veranstaltungen mit finanzmathematischen Inhalten sind geplant.

Am 19. Mai fand die alljährliche Mitgliederversammlung statt. Herrn Prof. Dr. Kalfs kurzweiliger Vortrag, wieviel Platz man braucht, eine Nadel zu drehen, fand reges Interesse. Nach dem Tätigkeitsbericht des Vorstands und der Arbeitsgruppenleiter sowie einigen Anregungen für die Zukunft fanden die Neuwahlen des Vorstands statt. Der erste Vorsitzende Herr Dr. A. Bartmann und der Schatzmeister Herr M. Martini wurden in ihrem Amt bestätigt; der zweite Vorsitzende Herr Prof. Dr. R. Fritsch und der Schriftführer Herr B. Emmer schieden auf eigenen Wunsch aus. Zu Nachfolgern wurden Herr Prof. Dr. D. Dürr (2. Vorsitz) und Frau K. Schüller gewählt. Wir wünschen Ihnen für Ihre Tätigkeit viel Erfolg!

Bernhard Emmer

Impressum	**mathe-lmu.de**
Herausgeber	Förderverein Mathematik in Wirtschaft, Universität und Schule an der Ludwig-Maximilians-Universität München e.V., Mathematisches Institut, Universität München, Theresienstr. 39, 80333 München, fmwus@mathematik.uni-muenchen.de, Konto: 1267532, Bankleitzahl 700 500 00, Bayerische Landesbank
ViSdP	Heinrich Steinlein, Mathematisches Institut, Universität München, Theresienstr. 39, 80333 München, Tel. 2180-4448, steinl@mathematik.uni-muenchen.de
Redaktion	Bernhard Emmer, Daniel Rost, Ingrid Schehrer, Erwin Schörner, Katharina Schüller, Heinrich Steinlein, Helmut Zöschinger
Auflage	5400
Layout	Gerhard Koehler, München, kws@kws-koehler.de
Druck	Siller Offsetdruck, Künzelsau

Die Redaktion bedankt sich bei den Firmen, die mit ihren Anzeigen die Herausgabe dieser Zeitung ermöglichten. Wir bitten die Leser um freundliche Beachtung der Anzeigen.

Berichte aus dem Mathematischen Institut

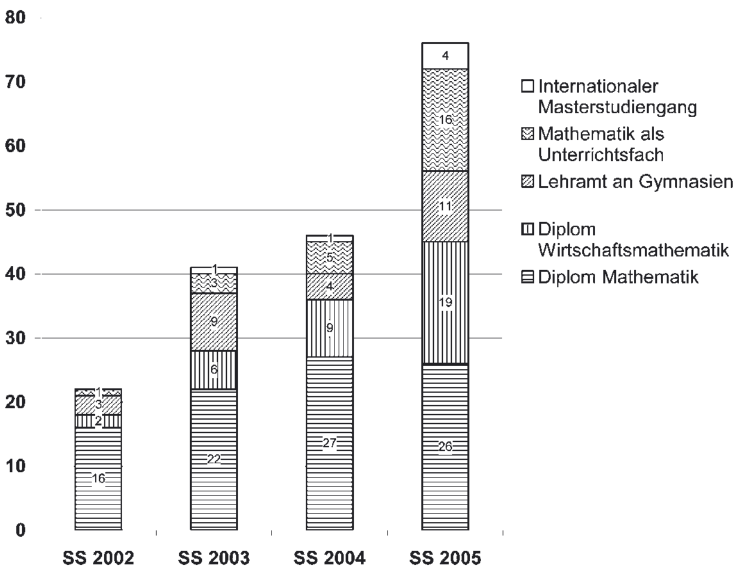
Studentenzahlen Der Trend steigender Anfängerzahlen im Sommersemester hat sich nicht nur fortgesetzt, sondern sprunghaft verstärkt, besonders auch bei den Lehramtsstudiengängen. Es bleibt zu hoffen, dass unser Institut trotz des starken Verlustes an Professoren- und Assistentenstellen das Angebot einer Einführungsvorlesung „Analysis I" auch in den kommenden Sommersemestern aufrechterhalten kann.
Die aktuellen, noch nicht ganz vollständigen Anfängerzahlen mit Vergleichszahlen vom Vorjahr:

Diplom Mathematik	26	(27)
Diplom Wirtschaftsmathematik	19	(9)
Lehramt an Gymnasien	11	(4)
Mathematik als Unterrichtsfach	16	(5)
Internationaler Masterstudiengang	4	(1)

Die Gesamtzahl der Studienanfänger in den genannten Studiengängen im Studienjahr 2004/05 betrug damit 451, eine Zahl, die nur ein einziges Mal im Jahr 1990/91 übertroffen wurde (damals 484). Die Gesamtzahl der Studierenden in obigen Studiengängen erreichte im vergangenen Wintersemester 1225.

Finanzen Nach dem schwierigen Jahr 2004 mit einer 20%-igen Mittelkürzung wurde in diesem Jahr der Etat wieder im vollen Umfang zugewiesen. Kleinere Veränderungen im positiven wie im negativen Sinne gab es aufgrund der steigenden Studentenzahlen und des Stelleneinzugs. Die Haushaltskonsolidierung nach einer spürbaren Verschuldung in den vergangenen Jahren wird bis Ende 2005 erreicht werden, zwingt aber auch in 2005 noch zu einschneidenden Einschränkungen.

Berufungen Frau Prof. Dr. Kristina Reiss (Universität Augsburg) erhielt den Ruf auf den Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik (Nachfolge Fritsch).
Ebenso erging schon der Ruf auf eine W2-Professur für Finanz- und Versicherungsmathematik (Nachfolge Oppel) an Herrn Prof. Dr. Josef Teichmann (TU Wien).



Die Berufungsliste für eine W2-Professur im Bereich Geometrie und Topologie (Nachfolge Schuster) wurde vom Fachbereichsrat verabschiedet.

Personalien Ende des vergangenen Wintersemesters wurde Herr Prof. Dr. Hans Werner Schuster in den Ruhestand verabschiedet. Zum Ende des laufenden Sommersemesters steht die Pensionierung von Herrn Prof. Dr. Wolfgang Zimmermann und die Emeritierung von Herrn Prof. Dr. Otto Forster an. Die Stelle von Herrn Zimmermann wird in eine Assistentenstelle umgewandelt werden, der Lehrstuhl von Herrn Forster (einschließlich einer Assistentenstelle und einer halben Sekretärinnenstelle) wird eingezogen werden. Damit endet eine 235-jährige ruhmreiche Geschichte – die Liste der Inhaber dieses ältesten Lehrstuhls unseres Instituts umfasst so große Namen wie Ferdinand von Lindemann, Constantin Carathéodory und Karl Stein.

Ehrungen Herrn Dr. Erwin Schörner wurde einer der diesjährigen Preise für gute Lehre des Bayerischen Wissenschaftsministeriums zuerkannt.
Herr Dr. Thomas Vogel erhielt kürzlich einen der Promotionspreise der Universität.

Münchner Mathematisches Kolloquium
Anlässlich des 125. Geburtstages von Oskar Perron (geboren am 7. Mai 1880 in Frankenthal/Pfalz) wird am 1. Juli (16 Uhr c.t. in Hörsaal E27) im Münchner Mathematischen Kolloquium Herr Prof. Roger Nussbaum (Rutgers University) vortragen über „Perron-Frobenius Theory and Games by the Seashore“ (vgl. Artikel auf Seite 26).

Mittelstraß-Kommission Der Kommissionsbericht „Wissenschaftsland Bayern 2020“ regt eine engere Zusammenarbeit der Mathematischen Institute von LMU und TUM an. Die beiden Institute schlagen in diesem Zusammenhang die Gründung eines „Munich Mathematical Science Center for Research and Studies“ vor. Verschiedene strukturelle Änderungen stehen auch an der Universität selbst an, z. B. eine Zusammenführung von einigen Fakultäten zu größeren Einheiten. Das Mathematische Institut möchte hierbei in der LMU die Rolle der Mathematik als Querschnittswissenschaft erhalten und bekundete sein Interesse an der Fortführung der organisatorischen Einheit mit Informatik und Statistik.

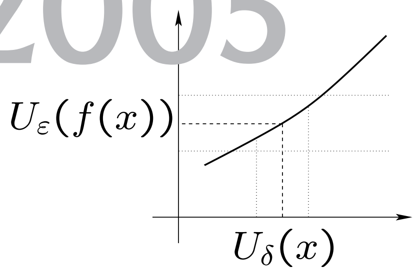
Bachelor- und Masterstudiengänge An unserem Institut wird in diesem Jahr noch kein Bachelorstudiengang eingeführt. Die Universität plant die endgültige Umstellung für das Jahr 2007 mit Übergangsregelungen für die derzeitigen Studienanfänger.
Auf der Konferenz der Mathematischen Fachbereiche am 7. Mai, auf dem unser Institut durch Herrn Prof. Erdös vertreten war, wurde die höchst kritische Frage der Akkreditierung der Bachelorstudiengänge intensiv besprochen.

Mathematik am Samstag Wie in den Jahren zuvor fand die Vortragsreihe „Mathematik am Samstag“ großen Anklang. Jeweils ca. 80 Zuhörerinnen und Zuhörer fanden sich ein zu Vorträgen der Kollegen Cieliebak, Merkl und Spann sowie von Frau Prof. Angeleri Hügel (Varese) über so spannende Themen wie Stabilität, Irrfahrten, digitale Bildverarbeitung und Kryptographie.

Tag der Fakultät Der Tag der Fakultät mit der Verabschiedung und Ehrung der diesjährigen Absolventen ist geplant für Freitag, den 15. Juli (Beginn 15 Uhr c.t.). Symbolisch für den Generationswechsel an unserem Institut wird es je eine Antritts- und eine Abschiedsvorlesung geben: Herr Prof. Erdös wird vortragen über „Ordnung in der Unordnung: Die Ramsey-Theorie“ und Herr Prof. Forster über „Das Spektrum in Physik, Analysis, Algebra und Zahlentheorie“.

Probestudium Mathematik – LMU-Mathe-Sommer 2005

05.-09. September 2005



$$\forall \varepsilon \; \exists \delta \ldots$$

An die Grenze gehen...

Limes und Unendlichkeit

Leiter: Prof. Dr. Franz Merkl und Dr. Edgardo Stockmeyer

Was bietet mir der LMU-Mathe-Sommer?

* Der LMU-Mathe-Sommer bietet Ihnen die Gelegenheit, ein spannendes Gebiet der Mathematik näher kennen zu lernen und zusammen mit anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern interessante Problemstellungen selbstständig zu lösen.
* Die Teilnahme am LMU-Mathe-Sommer wird Ihnen den Einstieg ins Mathematik-Studium und auch in naturwissenschaftliche, technische sowie wirtschafts- und sozialwissenschaftliche Studiengänge erleichtern.

Wie läuft der LMU-Mathe-Sommer ab?

Der LMU-Mathe-Sommer (täglich von ca. 10-17 Uhr) bietet einen Einblick ins Studium mit seinen typischen Veranstaltungen:

* vormittags Vorlesung
* anschließend gemeinsamer Mensabesuch
* nachmittags Workshops/Übungen in kleinen Gruppen

Darüber hinaus beinhaltet der LMU-Mathe-Sommer:

* Informationen über die Mathematik-Studiengänge
* Präsentation interessanter Berufsbilder durch Mathematiker aus der Praxis
* Exkursion „Mathematik in der Anwendung"
* Abschlussfeier zum Ausklang des LMU-Mathe-Sommers

Welche Vorkenntnisse sind nötig?

* Vorausgesetzt werden die Lerninhalte der Jahrgangsstufe 10 in Mathematik.
* Sollten Sie die 10. Jahrgangsstufe noch nicht abgeschlossen haben und Interesse haben, setzen Sie sich bitte mit uns in Verbindung.

Was kostet die Teilnahme?

* Eine Teilnahmegebühr wird nicht erhoben, die Arbeitsmaterialien für die Workshops werden gestellt.
* Die mittägliche Verpflegung in der Mensa (freiwillig) kostet ca. 3 Euro pro Tag.
* Anreise- und Übernachtungskosten müssen Sie leider selbst tragen; auf Wunsch informieren wir Sie aber gerne über günstige Übernachtungsmöglichkeiten.

Wo bekomme ich weitere Infos?

* Unter www.probestudium.de oder www.lmu-mathe-sommer.de
* Mathematisches Institut, LMU München, Kontaktbüro Probestudium, Theresienstr. 39, 80333 München; Tel. 2180-4427
* e-mail: probestudium@mathematik.uni-muenchen.de

Internationale Mathematik-Olympiaden

Die internationale Mathematikolympiade (IMO) ist der bedeutendste internationale mathematische Schülerwettbewerb und findet jedes Jahr im Juli statt. Teilnahmeberechtigt sind alle Schüler, die noch nicht das 20. Lebensjahr vollendet haben und noch nicht studieren.

Die erste IMO fand 1959 als länderübergreifender Wettbewerb von 7 damaligen Ostblockstaaten in Rumänien statt. An der 45. IMO in Athen 2004 (einen Monat vor den Olympischen Sommerspielen) nahmen 85 Länder mit 31 Schülerinnen und 455 Schülern teil (dass IMO und Olympische Spiele im gleichen Land stattfinden, ist eine Ausnahme).

So verläuft eine IMO: Zu Beginn reisen die Delegationsleiter aller Teilnehmerländer an. Diese bilden während der IMO die „Jury", das oberste Entscheidungsorgan – ein ständiges „Olympisches Komitee" gibt es nicht. Die Jury hat nun ein paar Tage Zeit, um aus ca. 30 Aufgaben, die zuvor aus Vorschlägen der Teilnehmerländer ausgewählt worden sind, die sechs Wettbewerbsaufgaben auszuwählen, sie in die Muttersprachen der Schüler zu übersetzen und ein Korrekturschema für die gängigsten Lösungen zu erstellen. Alle Aufgaben (meist aus den Bereichen Geometrie, Zahlentheorie, Kombinatorik, Ungleichungen, Polynome, Funktionalgleichungen) haben mindestens eine elementare Lösung; die Schüler dürfen aber auch Methoden der höheren Mathematik verwenden. Wenige Tage nach Ankunft der Jury reisen die stellvertretenden Delegationsleiter mit den Schülern an und werden jeweils von ihrem „Guide" aus dem Gastgeberland begrüßt, der die Schüler während des Aufenthaltes begleitet, Organisatorisches mitteilt und klärt und mit seinen Sprach- und Landeskenntnissen weiterhilft. (Den Teilnehmerländern steht es frei, zusätzlich „Beobachter" auf eigene Rechnung mitzunehmen, z. B. Ehepartner der (stellvertretenden) Delegationsleiter.) Nach ein paar Tagen zum Akklimatisieren und für die Zeitumstellung beginnt nach einer feierlichen Eröffnung der eigentliche Wettbewerb, nämlich zwei 4½-stündige Klausuren mit je drei Aufgaben an zwei Vormittagen. Hierzu sind Schreibzeug, Zirkel und Lineal (aber inzwischen kein Geo-Dreieck mehr) zugelassen; Papier wird gestellt. Alle Schüler erhalten unabhängig von ihrem Alter die gleichen Aufgaben. Vor dem Wettbewerb ist die Jury streng von den übrigen Teilnehmern abgeschirmt, was angesichts Kommunikationsmitteln wie Handy und E-Mail inzwischen viel stärker auch Vertrauenssache ist als noch vor einigen Jahren. Nach dem Wettbewerb ziehen die stellvertretenden Delegationsleiter zu den Delegationsleitern um, um gemeinsam die Aufgaben ihrer Mannschaft zu korrigieren. Die offizielle Wertung für eine Aufgabe ergibt sich jeweils in einem halbstündigen Gespräch mit zwei vom Gastgeberland gestellten Koordinatoren, die zuvor die Kopien der Lösungen durchgesehen haben. Um Betrug auszuschließen, fungieren für die Mannschaft aus dem Gastgeberland als Koordinatoren der Delegationsleiter und stellvertretende Delegationsleiter des Landes, das die Aufgabe vorgeschlagen hat. In Zweifelsfällen – insbesondere bei Teillösungen mit ungewöhnlichen Lösungsansätzen – entscheidet der Leiter der Koordination dieser Aufgabe oder als letzte Instanz die Jury. Währenddessen können die Schüler in Ausflügen das Land und andere Teilnehmer kennen lernen und beobachten mit Spannung die sich langsam füllenden

Ergebnistafeln – pro Aufgabe gibt es 0 bis 7 Punkte. Nach einem gemeinsamen Ausflugstag – 2004 nach Mykene, Nafplio und Epidaurus – findet die Preisverleihung statt, bei der mehrere hundert Medaillen verliehen werden.

Nach vollständiger Bewertung der Lösungen hat die Jury die Punktegrenzen für die Gold-, Silber- und Bronzemedaillen so festgelegt, dass möglichst nicht mehr als die Hälfte der Teilnehmer eine Medaille erhält und sich die Gold-, Silber- und Bronzemedaillen möglichst wie 1:2:3 verhalten. Diese Wertung im Gegensatz zum üblichen „Siegertreppchen" ist sinnvoll, da es nur eine einzige Disziplin gibt und die Leistungen nicht so fein differenziert – z. B. auf Tausendstelsekunden genau – wie im Sport gemessen werden können; meist haben auch mehr als drei Leute die volle Punktzahl 42. Neben den Medaillen gibt es noch Urkunden und evtl. Sachpreise; für besonders elegante Lösungen kann es einen Sonderpreis geben. Hat ein Schüler eine Aufgabe vollständig gelöst, aber keine Medaille, erhält er eine Anerkennungsurkunde. 2004 erhielt jeder Teilnehmer zudem einen Lorbeerkranz – wie die „echten" Olympioniken. Nach der Preisverleihung gibt es noch ein Abschlussfest, bevor am nächsten Tag die Teilnehmer abreisen.

Neben der offiziellen Medaillenwertung werden in der inoffiziellen Mannschaftswertung die Summen der von den Schülern erzielten Punktzahlen verglichen. Da manche Mannschaften mit weniger als sechs Teilnehmern anreisen, ist dies nicht wirklich repräsentativ. In den 80er Jahren war die deutsche Mannschaft meist sehr weit vorne dabei, mehrmals sogar die Mannschaft mit der größten Summe. Seitdem sind manche starke Länder wie z. B. China dazugekommen. In vielen Ländern gibt es Spezialschulen für Mathematik, und in manchen Ländern ist Mathematik allgemein beliebter als hier:

Die deutsche IMO-Mannschaft 2004: Christian Sattler, Matthias Ohst, Annika Heckel, Michail Shkolnikov, Peter Scholze, Darij Grinberg, Dr. Eric Müller (stellvertretender Delegationsleiter), Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau (Delegationsleiter) in den USA nehmen ca. 100.000 Jugendliche an der ersten Runde der USA-Mathematikolympiade teil, an deutschen Wettbewerben nur wenige Tausend. Meist schneiden große, bevölkerungsreiche Länder besser als kleine ab, es gibt aber Ausnahmen wie Israel. Die deutsche Mannschaft kann sich aber mit ihren Leistungen weiterhin sehen lassen.

Die beiden bislang erfolgreichsten IMO-Teilnehmer Christian Reiher aus Scheyern und Reid Barton aus den USA haben jeweils viermal eine Goldmedaille erreicht. Der jüngste Goldmedaillengewinner ist meines Wissens ein damals (1988) zwölfjähriger Australier gewesen.

Die DDR nimmt seit 1959 fast durchgehend an der IMO teil, die Bundesrepublik Deutschland seit 1977. Die IMO fand 1974 in Erfurt und 1989 in Braunschweig statt und wird 2009 in Bremen ausgetragen werden.

Vorbereitung und Auswahl der Mannschaften ist jedem Land völlig freigestellt. Die deutsche Vorbereitung (seit 1991 gemeinsam mit den neuen Bundesländern) beginnt mit zwei Auswahlklausuren Anfang Dezember, an denen ca. 130 Schüler teilnehmen dürfen – Preisträger der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik, der deutschen Mathematikolympiade und „Jugend forscht". Die besten 16 Schüler dürfen die fünf Vorbereitungsseminare besuchen – auf einem Schiff bei Rostock, in Bad Homburg und im Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach – bei denen in einigen Klausuren die Mannschaft ermittelt wird. Die Seminare werden großenteils von ehemaligen IMO-Teilnehmern durchgeführt, die neben Problemlösungsstrategien und diversen Lehrsätzen und Prinzipien auch sehr viele Aufgaben besprechen. Die Kosten für die Vorbereitung und Anreise zur IMO (zwischen Ankunft und Abfahrt übernimmt das Gastgeberland alle Kosten) trägt der Verein Bildung und Begabung, finanziert hauptsächlich vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft.

Mit der Einführung des achtjährigen Gymnasiums in Bayern werden die bayerischen Schüler ein Jahr weniger als derzeit an der IMO teilnehmen können.

Die deutschen IMO-Teilnehmer werden – wie auch die Bundessieger im Bundeswettbewerb Mathematik – in die Studienstiftung des Deutschen Volkes aufgenommen und studieren dann meist Mathematik. Manche machen eine ziemliche mathematische Karriere – sechs IMO-Teilnehmer haben eine Fields-Medaille errungen, und die Lehrstuhlinhaber Professor Erdös, Leeb und Merkl sowie Herr Dr. Spann von unserem Rechenzentrum und Herr Thomas Richthammer sind ehemalige IMO-Teilnehmer, nicht zu vergessen die beachtliche Zahl von IMO-Teilnehmern unter unseren früheren und aktuellen Studenten.

Mehr Informationen zur IMO gibt es auf den Internetseiten:

www.bundeswettbewerb-mathematik.de/imo
sowie
www.mathematik-olympiaden.de.

Eric Müller

Eine der 6 Aufgaben der IMO 2004: würden Sie die in 90 Minuten schaffen?

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Der Kreis mit dem Durchmesser BC schneidet die Seiten AB und AC in M bzw. N. Der Mittelpunkt der Seite BC sei O. Die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle MON$ schneiden sich in R. Man beweise, dass die Umkreise der Dreiecke BMR und CNR einen gemeinsamen Punkt haben, der auf der Seite BC liegt.

Studieren vor dem Abitur

Neben unseren erfolgreichen Förderprogrammen für Schülerinnen und Schüler wie etwa dem Tag der Mathematik blieb weitgehend unbeachtet, dass immer wieder Schüler, wie im nachfolgenden Bericht beschrieben, reguläre Lehrveranstaltungen besuchten, soweit dies mit ihrem Schulalltag vereinbar war, und auch Scheine erwarben, die später vom Prüfungsausschuss als reguläre Studienleistungen anerkannt werden konnten.
Solch ein Studium neben der Schule wird sicher immer auf wenige Einzelfälle besonders begabter Schülerinnen und Schüler beschränkt bleiben, die Universität wird aber in Zukunft verstärkt dazu einladen und Hilfestellungen geben.

„You must unlearn what you have learned." Dieser Spruch aus „Star Wars Episode V" wäre sicherlich ein schönes Motto einer Einführungsveranstaltung für Erstsemester, die gerade ihr Mathematikstudium anfangen. Schließlich weiß jeder: Zwischen Schulmathematik und der Universitätsmathematik ist der Unterschied immens.

Sicherlich gibt es viele, denen Schulmathematik Freude bereitet, die sich nach praktischen und anschaulichen Fragestellungen sehnen und dabei das Hauptaxiom der Schulmathematik „Alles, was anschaulich klar ist, stimmt" gerne bereit sind, in Kauf zu nehmen. Zweifelsohne gibt es Gründe für dieses Axiom. Meinem Geschmack entsprach es jedoch nicht, und so habe ich mich während meiner Schulzeit immer auf das Studium gefreut. Das Fach Mathematik stand auf Grund meiner zahlreichen Teilnahmen an außerschulischen mathematischen Aktivitäten, wie Wettbewerben, Vorträgen für Schüler (u. a. auch an der LMU) etc. fest.

Die Möglichkeit, in das Studium hineinzuschnuppern, bot sich für mich bereits im Sommersemester 2004. Da ich mir den Stoff von Analysis 1 aus Skripten und Büchern angeeignet hatte, war es mir nach Rücksprache mit Herrn Prof. Leeb möglich, seine Vorlesung Analysis 2 zu hören. Zu diesem Zeitpunkt war ich noch Schüler der K13 eines Münchner Gymnasiums in der Nähe der Uni und stand kurz vor meiner Abiturprüfung, welche in Bayern üblicherweise im Mai stattfindet. In dieser Phase ist es trotz der GSO (Gymnasialschulordnung), die diesem Brauch klar widerspricht, gängig, dass man nur noch diejenigen Kurse in der Schule besucht, in denen man später geprüft werden soll. Dies trug zu einer massiven Entlastung meines Stundenplans bei, jedoch leider an falschen Stellen. Deshalb konnte ich in den ersten drei Wochen nur die Übung, jedoch nicht die Vorlesung besuchen und musste also anhand des Skripts einer Freundin lernen.

Ab der vierten Woche hatte ich jedoch an allen drei relevanten Terminen mit nur wenigen Ausnahmen Zeit. Genau da begann der Stoff, anspruchsvoll zu werden, was mir teilweise auch Schwierigkeiten bereitet hat. Am Ende des Semesters habe ich zusammen mit anderen eine dreistündige Abschlussklausur geschrieben und bekam anhand des dort erzielten Ergebnisses einen Schein ausgehändigt.

Zusammenfassend kann ich sagen, dass es für mich eine sehr nützliche Erfahrung war. Einerseits war ich, als es für mich im Wintersemester 2004/05 richtig losging, nicht mehr ganz ins kalte Wasser geschmissen. Andererseits hoffe ich, dass ich meine Gesamtstudiendauer nun verkürzen kann.

Alexander Wugalter

Tag der Mathematik 2005

Samstag
9. Juli
2005
Theresienstr. 39
ab 8.30 Uhr

Wettbewerbe

Workshops

Vorträge

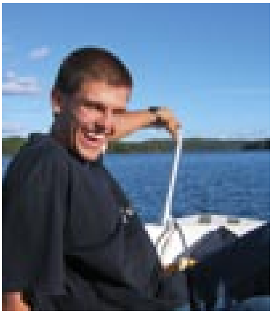
Spaß

Münchener Bezirksfachgruppe Mathematik im Bayerischen Philologenverband
Mathematisches Institut der Universität München

Information und Anmeldung: www.mathematik.uni-muenchen.de/~didaktik/TdM2005.html

Auslandsstudium

Schweden



Studierst Du noch oder lebst Du schon… in Schweden?
„Jag tömmer askfatet." – „Ich leere den Aschenbecher." Das war so ziemlich der einzige schwedische Satz, den ich fehlerfrei beherrschte, als ich im August 2003 mein Studentenzimmer in Stockholm bezog. Dass man sich in der Hauptstadt Schwedens auch mit anderen Dingen als Aschenbechern beschäftigen kann, lernte ich schnell im Laufe des Jahres, das ich auf Vermittlung von Herrn Professor Siedentop als ERASMUS-Austauschstudent an der Königlich-Technischen Hochschule (KTH) Stockholm verbringen durfte. Die KTH ist die größte Technische Universität Schwedens, und sie hat ein renommiertes Mathematikinstitut. Es gibt zwar keinen eigenen Mathe-Studiengang, so dass ich offiziell als Physiker eingeschrieben war; durch die Kooperation mit dem Mathematikinstitut der benachbarten Stockholmer Universität ließen sich jedoch trotzdem genügend interessante Vorlesungen finden. Kleine Vorlesungsgruppen und hilfsbereite Dozenten, verbunden mit einer hervorragenden räumlichen Ausstattung, boten ideale Studienbedingungen.
Die KTH legt großen Wert auf ihre internationalen Kontakte, deshalb werden die ausländischen Studenten dort auch sehr gut betreut. So organisierte der International Student Service zu Beginn des Studienjahres viele Ausflüge und Feste, damit wir ausländischen Studenten uns treffen und darüber hinaus ein bisschen schwedische Kultur kennen lernen konnten. Bei diesen Unternehmungen und im Schwedischintensivkurs, der gleichzeitig lief, gewann ich schnell Freunde unter den Austauschstudenten, wovon die meisten ebenso wie ich in „Lappis" wohnten, einem Viertel am Nordrand Stockholms, das eigens für schwedische und ausländische Studenten errichtet wurde.
Einige dieser Freunde und ich beschlossen dann ein Projekt, das uns die nächsten Wochen beschäftigte: den Bau eines Saunafloßes. Nachdem wir in Werkstätten Ölfässer organisiert, aus Schuttcontainern Bauholz besorgt und in Finnland einen Motor geholt hatten, konnten wir schließlich Mitte September unser fünf mal fünf Meter großes, zehn Personen tragendes Floß triumphal in den nahe gelegenen Schären zu Wasser lassen. Den Bau der Sauna mussten wir dann auf den Frühling verschieben, da uns leider die Forstverwaltung einen Strich durch die Rechnung und das Floß zu Kleinholz machte.
Durch dieses Projekt lernte ich übrigens meine besten schwedischen Freunde kennen, da ich als Theoretiker den Bau des Floßes lieber anderen überließ und die Pflege der „Public Relations" übernahm, das heißt, ich unterhielt mich mit vorbeikommenden Anwohnern, die sich neugierig nach unserem Projekt erkundigten.
Mit deren Hilfe machte ich dann auch Fortschritte in der schwedischen Sprache. Obwohl die Sprache recht nah am Deutschen ist, ist es in Schweden nicht einfach, als Anfänger im Alltag Schwedisch zu üben, da die meisten Schweden fast perfekt Englisch sprechen. So werden auch die Vorlesungen an der Universität bereits auf Wunsch eines einzigen Studenten auf Englisch gehalten, Prüfungen können häufig ebenso auf Englisch geschrieben werden.

Die Nähe des Schwedischen zum Deutschen kann übrigens manchmal trügerisch sein. Als ich vor meinem ersten „Urlaub daheim" danach gefragt wurde, wie ich denn heimreisen würde, ließ ich mich durch das deutsche Wort „Liegewagen" dazu verleiten, zu behaupten, ich würde in einem „likvagn" fahren. Entsetzt nahmen meine schwedischen Freunde zur Kenntnis, dass ich in einem Leichenwagen heimzufahren gedachte… Am nächsten Tag setzte ich noch einen drauf, als ich „Jag går bort klockan elva" verkündete, was meiner Meinung nach „Ich gehe um elf Uhr weg" bedeutete, nach allgemeinem schwedischen Sprachverständnis jedoch „Ich sterbe um elf Uhr". Dies passte inhaltlich zu meiner Aussage vom Vortag, entsprach jedoch glücklicherweise nicht der Wahrheit.

Während meines Jahres in Schwedens Hauptstadt lernte ich eine Stadt und ein Land kennen und lieben, das nicht nur eine spannende Kultur und eine wunderbare Natur zu bieten hat, sondern auch wegen seiner geographischen Lage interessant ist. Kilometerlange Schlittschuh-Fahrten über zugefrorene Seen im kalten Winter werden mir ebenso in Erinnerung bleiben wie die langen Sommernächte mit Lagerfeuer am Strand von Lappis, in denen es einfach nicht dunkel wurde.
Jedem Studenten, der überlegt, ein Jahr im Ausland zu studieren, möchte ich dies an dieser Stelle wärmstens empfehlen. Sollten Schweden und gar Stockholm zur Auswahl stehen, stünde meine Entscheidung bereits fest.

Matthias Erven

Kanada

Toronto – etwas amerikanisch und dennoch nicht ganz

Wolkenkratzer zieren zusammen mit dem CN Tower die Skyline der Innenstadt und zeugen vom amerikanischen Einfluss. An deren Seite gesellen sich in vielen Facetten die zahllosen funktional und ethnisch gegliederten Stadtteile wie der Entertainment District, Fashion District, Chinatown, Little Italy, … Jeder repräsentiert sich mit dem für ihn typischen Flair bis hin zu Skurrilitäten – zweisprachige Straßenschilder, in Englisch und Chinesisch.
Die Wolkenkratzer bilden aber nur die Spitze eines Eisberges. Insbesondere im Winter (also bei unter -20°C) laden die unterirdisch verbundenen Einkaufszentren unter den Hochhäusern zum Bummeln ein. So kalt wie der Winter sein kann, so heiß kann auch der Sommer werden, der Frühling ist auf das Nötigste reduziert.
Was hat mich nun bewegt, hier an der University of Toronto, der UofT, meine Diplomarbeit in der Informatik zu schreiben?
Der Stein des Anstoßes war eine allgemeine Informationsveranstaltung der Physiker zu Auslandsaufenthalten in meinem ersten Semester. Im Prinzip gibt es zwei Möglichkeiten: vor oder nach dem Vordiplom. Um von einem potentiellen Aufenthalt möglichst viel mitnehmen zu können, entschloss ich mich, erst nach dem Vordiplom ins Ausland zu gehen, da bis dahin das Studium den notwendigen Überblick über verschiedene Themenkomplexe vermittelt und sich Interessen abgezeichnet haben sollten. Vor dem Vordiplom sind für gewöhnlich die Studienange-

bote alle standardisiert. Differenzierung und Spezialisierung sind erst kurz vor dem Diplom möglich.

Unabhängig vom Zeitpunkt sollte man mindestens ein Jahr für die Vorbereitung einkalkulieren – lieber etwas länger. Dabei ist nicht nur an die Zeit für diverse Formalitäten zu denken, sondern auch ein Sicherheitspuffer ins Kalkül zu ziehen. Die Notwendigkeit genügend Zeit einzuplanen, musste ich am eigenen Leib spüren. Mein erster Versuch, an der Ostküste der Vereinigten Staaten zu studieren, ist kurzfristig geplatzt: der dortige Betreuer ist trotz anfänglichen Interesses und Zusage abgesprungen.

Im Nachhinein bin ich auch nicht mehr verärgert, eher im Gegenteil. Dadurch ergab sich auch erst die Möglichkeit über das hiesige Graduiertenkolleg »Logik in der Informatik«, in dem ich seit mehreren Jahre arbeite, genauer über Dr. Jan Johannsen, Kontakt zu Prof. Stephen Cook hier an der University of Toronto aufzubauen – eine der Koryphäen in der Komplexitätstheorie – fast jeder dürfte den Begriff »NP-vollständig« gehört haben.

Nicht nur Stephen Cook, sondern auch die anderen Professoren, mit denen ich diskutierte, zeigten sich sehr aufgeschlossen, versiert und interessiert. So schrieb mich einer der Professoren an, mit dem Text »Komm doch einfach mal bei mir im Büro vorbei«. Hilfreich waren auch die aufgezeigten Verbindungen zu bereits bekannten oder ähnlichen Resultaten. Bei der Beschäftigung mit gleichen Fragestellungen zeichnete sich eine Nuance in der Sicht der Dinge ab. In der Beweis- bzw. Komplexitätstheorie wird im amerikanischen Raum vorwiegend semantisch, im europäischen eher syntaktisch argumentiert.

Da ich nicht als regulärer Student, sondern als so genannter »visiting student« an der UofT war, konnte ich mir die Vorlesungen herauspicken, die mich interessierten, ohne auf Leistungsnachweise angewiesen zu sein. Gleich in der ersten Vorlesung zeigte sich auch schon ein zweiter Unterschied. Am Ende wartete ich, dass die anderen auf den Tischen klopfen oder klatschen – man will ja nicht der Erste sein –, doch nichts passierte. Alle verließen kommentarlos den Hörsaal. Erster Lehrsatz: nur bei öffentlichen Vorträgen gibt es eine akustische Rückmeldung.

Ein weiterer Unterschied stellt die »reading week« um die Semestermitte dar. Eine Woche ohne Vorlesung; nur zur Aufbereitung und Vertiefung des Stoffes für die Studenten gedacht. Oder auch um Urlaub zu machen. Jedenfalls wenn man sich den fast leeren Speisesaal im Studentenwohnheim anschaut, in dem ich untergekommen bin.

Die Bewohner sind zum überwiegenden Teil Kanadier. Im Laufe der Zeit bildete sich eine europäische Gruppe heraus, vorwiegend aus Franzosen und einigen Deutschen, aber auch Kanadier schlossen sich an. Nahezu kunterbunt wie Toronto selbst, nur der asiatische Teil fehlte. Gemeinsam erkundeten wir das Umland; das nähere in Form der Bars und Cafés und das fernere wie Kanadas Hauptstadt Ottawa.

Die UofT brilliert auch durch ihre Campusanordnung, umgeben von Colleges mit ihren Fassaden aus Backstein. Zuweilen versetzen sie den Betrachter ein Jahrhundert zurück in die Vergangenheit und erinnern an die altehrwürdigen in Oxford beispielsweise; wenn sich da nicht einige postmoderne Gebäude eingeschlichen hätten. Eine Mensa sucht man jedoch vergebens. Dafür fangen die vielen kleinen Cafés und Bars zum Mittagessen den Suchenden ab. Nachts werden sie zum Mittelpunkt des Studentenlebens…
Jeder, der mit dem Gedanken spielt, im Ausland zu studieren oder zu forschen, sollte es einfach wagen. Vieles kann geplant werden, aber nicht alles. In jedem Fall eine Bereicherung und eine Gelegenheit, die sich später im Leben vielleicht nicht mehr so einfach bietet.
Enjoy your life!

Markus Latte

Neuseeland

Auf was man sich eingelassen hat, wenn man für ein Jahr ins Ausland geht, wird einem eigentlich erst bewusst, wenn man schon im Flugzeug sitzt. In meinem Fall hieß der Zielort Christchurch auf der Südinsel Neuseelands, und der Plan war, dort an der University of Canterbury für zwei Semester zu studieren. Gut, Pläne können sich ändern, dazu aber an späterer Stelle mehr.
Die Phase der Vorbereitungen für einen Auslandsaufenthalt, in der man neben dem normalen Studium auch noch sämtliche Behördengänge, Bewerbungsschreiben und ähnliche Aufgaben zu bewältigen hat, vergeht schnell, und irgendwann sollte man wohl akzeptieren, dass man nicht alles im Voraus planen kann.
Zurück zum Flugzeug. Nach einem sehr langen und einprägsam unbequemen Flug wird einem klar, wie weit Neuseeland von Europa entfernt ist. Die Zwischenlandung in Südostasien ist nur der halbe Weg, und danach fliegt man noch einmal zwölf Stunden. Nicht, dass man das nicht schon vorher weiß, es mitzumachen ist etwas anderes. Auch das Land selber ist geprägt durch diese geographische Isolation. Von der restlichen Welt bekommt man gerade auch in den Nachrichten nicht viel mit. Nicht, dass ich den Eindruck erwecken möchte, dass Neuseeland in der Kolonisationszeit hängen geblieben ist, vielmehr resultiert die Abgeschiedenheit in einer sehr entspannten Atmosphäre, die überall vorherrscht. Ansonsten ist über das Land nicht viel mehr zu sagen, als dass sämtliche Vorurteile über die landschaftliche Schönheit mehr als zutreffend sind. Von Christchurchs Innenstadt ist es eine halbe Stunde an den Strand und eine Stunde in die Berge. Was kann man sich da noch mehr wünschen?
An diesem wunderschönen Ort angekommen lebt man sich (gezwungenermaßen) sehr schnell ein. Das Klima ist angenehm – meteorologisch und sozial. Auch an der Universität fühlt man sich schnell zu Hause. Die University of Canterbury hat eine angenehme Atmosphäre; ca. 12.000 Studenten studieren hier. Das Department of Mathematics & Statistics selber ist in dem neuesten (!) Bau der Universität untergebracht. Auch hier trifft

man ausnahmslos nette Leute. Wie schon Stefan Eberle in seinem Bericht einer früheren Ausgabe dieses Heftes erwähnte, gehört man als „postgraduate student“ fast schon zum staff (d.h. dem Lehr- und Forschungspersonal) und wird dementsprechend behandelt. Zur Mathematik ist zu sagen, dass meiner Meinung nach die von den Studenten geforderte Leistung in Neuseeland etwas niedriger ist als die in Deutschland. Die erbrachte Leistung hingegen ist annähernd gleich. Allgemein wird mehr Wert auf die Anwendbarkeit gelegt (wohl ein Tribut an den Pioniergeist der frühen Siedler), aber auch ich, der ich eher der Reinen Mathematik zugeneigt bin, finde genug Beschäftigung; sogar mehr als gedacht. Wie bereits angedeutet, änderte sich mein Plan, nur für ein Jahr zu bleiben, ein wenig. Da sich die Möglichkeit bot, bei Prof. Bridges zu promovieren, wird Neuseeland voraussichtlich für weitere drei Jahre meine neue Heimat sein. Die Schönheit des Landes und die Art der Menschen hat bei dieser Entscheidung aber sicherlich auch eine kleine Rolle gespielt.

Zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Dr. Schuster und meinem jetzigen Supervisor Prof. Bridges, den einige vielleicht noch durch sein Jahr an der LMU kennen. Ohne beide wäre ich einerseits nie auf die Idee gekommen, in Christchurch zu studieren, andererseits unterstützten mich beide bei Wohnungssuche, Visaproblemen und Ähnlichem.

Und zum Schluss darf der obligatorische Aufruf an alle, die noch keine Auslandserfahrung haben, nicht fehlen, die Mühen nicht zu scheuen und den Schritt zu wagen, da es sich auf alle Fälle lohnt. Wer gerade an Neuseeland Interesse hat, sollte sich unverbindlich mit Herrn Schuster in Verbindung setzen. Außerdem wäre es mir persönlich ein Anliegen, an dieser Stelle die Idee vorzubringen, die persönlichen und mathematischen Kontakte zwischen der LMU und der UC in einem organisierten Austauschprogramm zu verfestigen.

Hannes Diener

Vom Glasperlenspiel zur Hochfinanz

Mein Studium der Mathematik an der LMU begann ich Anfang der Achtzigerjahre. Neben Mathematik belegte ich Vorlesungen am Institut für Logik und Wissenschaftstheorie. Die Schriften von Ludwig Wittgenstein über die Grundlagen der Mathematik hatten mich sehr beeindruckt, und ich wollte diese Texte wirklich verstehen. Nach dem Grundstudium hatte ich das Glück, einen Vorlesungszyklus von Prof. Forster über Algebraische Geometrie hören zu dürfen. Die Verbindung zwischen Algebraischer Geometrie und Kommutativer Algebra übte eine große Faszination auf mich aus, und so beschloss ich, mich in dieses Thema einzuarbeiten. Ähnlich wie mir erging es einer kleinen Gruppe anderer Studenten. Wir lernten die Verbindung zwischen der Komplexen Analysis und der Algebraischen Geometrie, die Verbindungen zur Algebraischen Zahlentheorie. Eine intellektuell hochinteressante Welt tat sich auf: Das französische Nicolas Bourbaki Programm, die Schriften von Grothendieck und vieles mehr. Wir verbrachten viele Nächte mit den Übungsaufgaben des Standardwerkes Algebraic Geometry von Robin Hartshorne.

Ob dies alles jemals eine praktische Anwendung haben würde, war zu diesem Zeitpunkt für mich nicht relevant. Es war, ganz frei von praktischen Zwängen, eine intellektuell anspruchsvolle Übung im Glasperlenspiel.

Meine Diplomarbeit bei Prof. Forster über singuläre algebraische Flächen schrieb ich in Oslo. Ich hatte ein DAAD Stipendium bekommen, Norwegisch gelernt und verbrachte ein wunderbares Jahr in Norwegen. Bei einem einmonatigen Aufenthalt am Mittag-Leffler Institut in Stockholm lernte ich Prof. Schneider kennen, einen Schüler von Prof. Forster. Er lud mich dazu ein, nach Abschluss des Diploms an die Universität Bayreuth zu kommen. Dort konnte ich dann eine Assistentenstelle antreten und hatte die Möglichkeit, in Algebraischer Geometrie zu promovieren. Meine Arbeit über Singuläre Bordigaflächen war eine natürliche Fortsetzung der Studien in München. In Bayreuth habe ich meine weitere Laufbahn vorbereitet. Inspiriert von den Norwegischkursen begann ich intensiv Französisch zu lernen. Diese praktischen Sprachkenntnisse waren später überaus wertvoll für meine Banklaufbahn.

Zum Zeitpunkt meiner Promotion war ich im Gespräch mit zwei Rückversicherungen bezüglich Stellen als Risk-Underwriter. Ich nahm dann aber ein Angebot der Deutschen Bank an und begann Anfang 1992 meine Laufbahn in Frankfurt. Mathematiker waren damals noch "Exoten" im Bankgewerbe. Ich begann in der Swapgruppe der Treasury, dem Nukleus des heute riesigen Derivatehandels der Deutschen Bank. Zunächst hatte ich die Aufgabe, die Kreditrisiken des bestehenden Derivateportfolios mathematisch zu analysieren und potentielle Kreditverluste zu quantifizieren. Es bildete sich rasch um unsere Gruppe innerhalb der Bank eine Art "Think tank". Die Bank gab uns alle erdenklichen Freiheiten: Prof. Schmidt, heute Professor für Finanzmathematik an der HfB in Frankfurt, war Teil unseres Teams. Er hat für uns in der Deutschen Bank ein regelrechtes Stochastikseminar veranstaltet. Wir lernten abends nach der Arbeit in der Bank von ihm über stochastische Integrale, Itô-Lemma und deren Anwendung beim Pricing von Derivaten.

Nach zwei Jahren wechselte ich von der Analystenstelle in der Treasury in den Swaphandel, wo meine eigentliche Banklaufbahn erst begann. Ich bekam die Verantwortung für das Swapbuch und die Optionen in Schweizer Franken übertragen und habe diese Zeit in sehr guter Erinnerung. Ich habe bei dieser Aufgabe das Handwerk des Swaphändlers wirklich von der Pike auf lernen können. Die technische Ausstattung der Bank war zu diesem Zeitpunkt noch schlecht und wir mussten alle unsere Pricingtools noch selbst programmieren – was im Nachhinein sich als hervorragende Schulung herausstellen sollte. International konkurrenzfähig waren wir so aber nicht.

Hilmar Kopper traf zu dieser Zeit weitreichende Entscheidungen und investierte viel Kapital in die Weiterentwicklung unseres Handels- und Investmentbankgeschäftes. Der markante Einschnitt war dann 1995 das Hiring von Edson Mitchell durch Hilmar Kopper. Edson kam von Merrill Lynch und baute in kurzer Zeit unser Handelsgeschäft aus. Die Veränderungen innerhalb der Bank waren dramatisch. Es gelang Edson im Fixed Income Geschäft, dem Bereich in dem ich arbeitete, in sehr kurzer Zeit an die amerikanische Konkurrenz Anschluss zu finden. Er war in vielerlei Hinsicht ein Ausnahmetalent und ein wirklich charismatischer Manager. Bis zum Jahr 2000 hatte er das Global Markets Geschäft der Deutschen Bank so weiterentwickelt, dass wir die Nummer 1 weltweit waren. Edson kam bei einem Flugzeugunglück tragisch ums Leben. Wieder stand alles auf der Kippe. Anshu Jain, der mit Edson 1995 zur Bank gekommen war, wurde sein Nachfolger und konnte seine Strategie nahtlos fortsetzen, und so war die Deutsche Bank von 2000 bis heute jedes Jahr eines der drei Tophäuser im Bereich Global Markets.

Es war für mich persönlich ein Glücksfall, dass ich die Entwicklung von Global Markets ab 1995 als Händler miterleben durfte. Dank der neuen technischen Ausstattung, die wir bekamen, und dem gewaltigen Zustrom von talentierten Mitarbeitern aus aller Welt konnte ich enorm viel dazulernen. Ich konnte die Produktpalette unseres Derivatedesks in Frankfurt weiterentwickeln. Von einfachen Swaps und Optionen machten wir rasch den Schritt zu komplexen Zinsderivaten mit pfadabhängigen Payoff-Profilen, nahmen Risiken in anderen Währungen und erweiterten dramatisch die Palette an Debtprodukten, die wir aktiv handeln.

Seit 1998 leite ich den Bereich OTC-Derivatives in Frankfurt. Das Leben auf einem Tradingfloor hat immer noch die gleiche Faszination für mich wie vor zehn Jahren. Es stellt eine unvergleichliche Arbeitsatmosphäre dar. Der Tradingfloor kennt seine eigenen Gesetze: Wer mit diesem Regelwerk zurechtkommt, schnelle Entscheidungen treffen kann und für die Bank dabei Geld verdient, dem gibt diese im Gegenzug ungewöhnlich viele Freiheiten in der Gestaltung und Weiterentwicklung des Geschäftes. Die Bank setzt dabei sehr viel Vertrauen in mich – ich habe mittlerweile ein Handelslimit von 2 Mrd. € – und gibt mir jegliche Freiheit beim Abschluss, der Ausgestaltung und Weiterentwicklung unseres Derivategeschäftes. Gestaltungsfreiheiten dieser Art findet man in einer Bank in diesem Maße wohl nur auf einem Tradingfloor. Ganz besonders schätze ich die Vielzahl von unterschiedlichen Nationalitäten und Charakteren, mit denen ich jeden Tag zu tun habe. Die Tradingfloors der Deutschen Bank in London, Frankfurt, New York und Singapore sind der Inbegriff der multikulturellen Gesellschaft. Hier in diesen Sphären ist die Globalisierung der Weltwirtschaft in einem physischen Sinne vollzogen worden.

Roland Weinfurtner

Hintergrundbild: Tradingfloor der Deutschen Bank

Rätselecke

Ein Austauschstudent berichtet, dass die Mensa seiner Heimatuniversität täglich neben vier schmackhaften Hauptgerichten auch eine Auswahl an drei köstlichen Suppen, sechs nahrhaften Beilagen, fünf vitaminreichen Salaten sowie vier verführerischen Nachspeisen anbietet. Wie viele Möglichkeiten gibt es damit, sich aus diesem Angebot ein Menü aus einem Hauptgericht und bis zu vier weiteren Bestandteilen, darunter mindestens einer Beilage, zusammenzustellen?

Max beobachtet, dass die Summe von Stammbrüchen durchaus ganzzahlig sein kann; so ist etwa $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$ oder auch $1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/20 = 1$. Er stellt sich nun die Frage, ob auch die Summe von aufeinander folgenden Stammbrüchen ganzzahlig sein kann. Wer kann ihm helfen?

In einem Büro sollen neben den Schreibtischen von drei Mitarbeitern auch ein Faxgerät, ein Laserdrucker sowie ein Kopierer zum gemeinsamen Gebrauch untergebracht werden; erfahrungsgemäß benutzt dabei jeder der drei Mitarbeiter mit der Zeit zu jedem der drei Geräte immer denselben Weg. Lassen sich nun die drei Schreibtische und die drei Geräte so aufstellen, dass sich neun paarweise kreuzungsfreie Wege entwickeln können?

Nachstehend nochmals die Rätsel von Heft 11, deren Lösungen man auf der folgenden Seite nachlesen kann

Ein Bankkunde steht am Geldautomaten und benötigt dringend etwas Bargeld, hat aber seine zwölfstellige Geheimnummer vergessen. Er erinnert sich nur noch daran, dass sie mit den Ziffern 42 beginnt und das Produkt von mindestens fünf aufeinander folgenden Zahlen ist. Kann der Kunde im Rahmen seiner drei Versuche, die richtige Geheimzahl einzugeben, sicher an sein Geld kommen?

Max möchte einen quadratischen Platz der Seitenlänge 1,80 m pflastern und besorgt daher im Baumarkt 27 rechteckige Platten der Länge 40 cm und der Breite 30 cm. Wie kann er damit die Fläche auslegen?

Es stehen drei brennbare Stäbe zur Verfügung, die – an einem Ende angezündet – eine Brenndauer von einer Minute bzw. fünf Minuten bzw. 15 Minuten aufweisen; es ist allerdings nicht bekannt, ob in gleichen Zeitintervallen immer die gleiche Länge eines Stabes verbrennt. Ist es möglich, mit diesen drei Stäben (und Feuer) eine Zeitspanne von neun Minuten exakt abzumessen?

Rätselecke

[Lösungen zu den Rätseln von Ausgabe 11 (Wintersemester 2004/05)]

Ist die Geheimnummer N das Produkt der k aufeinander folgenden Zahlen $x_1, \ldots, x_k$, so ist $k! \leq x_1 \cdot \ldots \cdot x_k < 4{,}3 \cdot 10^{11}$ und damit $5 \leq k \leq 14$; ferner ist das arithmetische Mittel a von $x_1, \ldots, x_k$ für ungerades k ganzzahlig sowie für gerades k von der Form $n + 1/2$ für ein ganzzahliges n. Für $k = 5$ ist $N = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) = a(a^2-1)(a^2-4)$ und damit $4{,}2 \cdot 10^{11} \leq N < a^5$, also $211{,}1 \leq a$, sowie $(a^2-4)^{5/2} < N < 4{,}3 \cdot 10^{11}$, also $a < 212{,}2$; somit kommt nur $a = 212$ mit $N = 210 \cdot 211 \cdot 212 \cdot 213 \cdot 214 = 428.184.545.040$ in Frage. Dagegen liefern die anderen ungeraden k keine weitere Lösung. Für $k = 8$ ist $N = (a - 7/2)(a - 5/2) \cdot \ldots \cdot (a + 5/2)(a + 7/2) = (a^2 - 1/4)(a^2 - 9/4)(a^2 - 25/4)(a^2 - 49/4)$ und damit $4{,}2 \cdot 10^{11} \leq N < (a^2 - 1/4)^4$, also $28{,}3 \leq a$, sowie $(a^2 - 49/4)^4 < N < 4{,}3 \cdot 10^{11}$, also $a < 28{,}7$; somit kommt nur $a = 28{,}5$ mit $N = 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 = 424.097.856.000$ in Frage. Dagegen liefern die anderen ungeraden k keine weitere Lösung. Damit kann der Bankkunde im Rahmen seiner drei Versuche sicher an sein Geld kommen – er kann sich sogar einmal vertippen!

Max muss wohl oder übel (mindestens) eine der 27 Platten zerschneiden. Nimmt man nämlich an, der quadratische Platz lasse sich mit den 27 intakten Platten auslegen, so liegen schließlich n mit der längeren Seite und damit 27-n mit der kürzeren Seite nach unten bzw. oben; aus Symmetriegründen kann n als gerade vorausgesetzt werden. Bezeichnet $x_1, \ldots, x_{27}$ den Abstand (in cm) des Schwerpunktes der einzelnen Platten vom linken Rand des Platzes, so ist $x_1 = 10a_1, \ldots, x_n = 10a_n, x_{n+1} = 10a_{n+1}+5, \ldots, x_{27} = 10a_{27}+5$ mit natürlichen Zahlen $a_1, \ldots, a_{27}$. Da der Schwerpunkt des Platzes genau 90 cm vom linken Rand entfernt ist, ergibt sich mit der Schwerpunktsformel $(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{27})/27 = 90$ dann $10(a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{27}) + (27-n) \cdot 5 = 90 \cdot 27$; somit muss $(27-n) \cdot 5$ durch 10 teilbar und damit 27-n gerade sein; dies steht aber im Widerspruch zur Wahl von n als gerade Zahl.

Man zündet zunächst den ersten und dritten Stab gleichzeitig an; ist nun nach einer Minute der erste Stab abgebrannt, zündet man den zweiten Stab an, und nach weiteren fünf Minuten, also nach insgesamt sechs Minuten, ist auch der zweite Stab abgebrannt, so dass die verbleibende Brenndauer des dritten Stabes noch genau neun Minuten beträgt. Möchte man allerdings den Beginn der abzumessenden Zeitspanne von neun Minuten frei wählen, muss man anders vorgehen. In diesem Fall zündet man alle drei Stäbe (an jeweils einem Ende) gleichzeitig an; ist nun nach einer Minute der erste Stab abgebrannt, zündet man den zweiten Stab auch am anderen Ende an, so dass sich dessen verbleibende Brenndauer von vier auf zwei Minuten halbiert. Ist nun nach insgesamt drei Minuten auch der zweite Stab abgebrannt, zündet man auch den dritten Stab am anderen Ende an, so dass sich dessen verbleibende Brenndauer von zwölf auf sechs Minuten halbiert; ist nun auch dieser Stab abgebrannt, sind insgesamt genau neun Minuten vergangen.

7. Forum für Begabungsförderung

Vom 17. bis 19. März 2005 veranstaltete der Verein „Begabtenförderung Mathematik e. V.“ gemeinsam mit dem Mathematischen Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München seine 7. Jahrestagung. Bei diesen Veranstaltungen erhalten Lehrerinnen und Lehrer Einblicke in die vielseitige Anwendung der Mathematik, und es werden Unterrichtsbeispiele vermittelt, die die große Diskrepanz zwischen den Fähigkeiten und Kenntnissen der Reifeprüflinge und den Erfordernissen der Mathematik anwendenden Studienfächer überbrücken. Zudem haben alle Lehrerinnen und Lehrer Gelegenheit, eigene Beiträge zu den genannten Themen vorzustellen.

v. l. n. r.: Professor Dr. Wildenhain, Dr. Meyer Vorsitzender von Begabtenförderung Mathematik e. V., Professor Dr. Pfeiffer

Die Tagung wurde von Professor Dr. Franz Merkl eröffnet. Grußworte sprachen Professor Dr. Günther Wildenhain (Universität Rostock) für die Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Professor Dr. Friedrich Pfeiffer (TU München) für die Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik und Ministerialrat Dieter Götzl für das Bayerische Staatsministerium für Unterricht und Kultus. Professor Dr. Wildenhain trifft den Punkt, wenn er sagt: „Begabungsförderung ist nicht zum Nulltarif zu haben. Begabungsförderung auf breiter Front wäre eine Chance für die Politik nachzuweisen, dass bisherige Äußerungen nicht nur Lippenbekenntnisse waren“, oder „Wichtig scheint auch die Weckung mathematischer Interessen möglichst im frühen Kindesalter“.

Die Tagung gliederte sich in eine Grundschul- und eine Gymnasialsektion; neben den Hauptvorträgen meist von Hochschuldozenten wurden vor allem von Lehrerinnen und Lehrern diverse Kurzvorträge und Workshops gehalten. Das 8. Forum wird vom 30. März bis 1. April 2006 an der neuen Universität in Erfurt stattfinden.

Da man nicht erwarten kann, dass auch in Zukunft das Gymnasium eine allgemeine Hochschulreife in dem Sinne vermittelt, dass jeder Abiturient für ein Mathematik anwendendes Studium hinreichende Mathematikkenntnisse besitzt, empfiehlt Begabtenförderung Mathematik e. V., am Gymnasium allen an Mathematik interessierten Schülerinnen und Schülern in jeder Jahrgangsstufe wöchentlich zwei Unterrichtsstunden Ergänzungsunterricht in Mathematik zu geben. Unter Umständen kann man die so erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten zu Studienbeginn durch eine Eingangsprüfung an den Universitäten bewerten. Der Verein sieht in den in Baden-Württemberg und Bayern eingeführten Intensivierungsstunden einen ersten Schritt in diese Richtung, wenn gewährleistet wird, dass diese Stunden zur Förderung und nicht nur zur Nachhilfe schwacher Schülerinnen und Schüler dienen.

Der Verein Begabtenförderung Mathematik e. V. gibt zweimal jährlich die Zeitschrift „Mathematikinformation“ heraus. Diese Zeitschrift dient in erster Linie dazu, Lehrern ausgearbeitete Curricula bis hin zu Musterlösungen der eingebauten Aufgaben zur Verfügung zu stellen, um den geforderten

Ergänzungsunterricht für begabte und interessierte Schülerinnen und Schüler durchführen zu können. Der Verein will damit nicht behaupten, dass heute der Mathematikunterricht veraltet ist bzw. Ungeeignetes lehrt, sondern er will dokumentieren, wie man im Regelcurriculum bestehende Lücken an der Schule schließen kann. Der Verein zeigt so, wie man die Vorstellungskraft bei Schülerinnen und Schülern hebt, um selbständig Ideen zu finden, die zu mathematischen Aussagen führen können. Natürlich befassen sich die Abhandlungen auch mit dem Begründen solcher Ideen. Wenn Druckraum und – beim Autor – Zeit vorhanden ist, wird man auch Alternativwege beim Beweisen finden.

Einige Themen aus den aktuellen Heften 41 und 42 (Heftpreis 8 € zusätzlich Versandkosten, Jahresabonnement 18 € einschließlich Versand):

Nr. 41:
Meyer Kh.: Zur Weiterentwicklung der Gymnasiallehrerbildung (Information für Ministerien, Universitäten und Gymnasien)
Engelhaupt+: Kürzeste Wege, Teil I (ab Jahrgangsstufe 7)

Ein Beispiel hieraus:
Aufgabe 1.3.2.2 (ab Klasse 8): *Ein Junge steht im Innern eines gleichseitigen Dreiecks.*

a) Er macht einen Rundlauf, bei dem er alle drei Seiten berührt. Sein Freund, der ihn beobachtet hat, sagt: „Du hast dich gut aufgestellt; denn dein Rundlauf war der kürzeste, der möglich ist“. An welchem Punkt begann der Rundlauf? Wie lang war er?

b) Jetzt macht der Junge einen „zweifach minimalen Rundgang“ im gleichseitigen Dreieck, d. h. er macht einen Rundlauf, bei dem er jede Seite zweifach trifft. Wo kann er starten, welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es und wie lang ist sein Weg?

Gräbe: Bericht vom Kontaktseminar 4.-8. 3. 2004 in Bratislava (Information für Lehrerinnen und Lehrer)

Nr. 42:
Engelhaupt+: Kürzeste Wege, Teil II (ab Jahrgangsstufe 7)
Förtsch: FOURIER-Reihen im Unterricht (ab Jahrgangsstufe 9)
Heinrich: Innenwinkelsummen nicht einfacher Sternfiguren – ein Angebot zur Förderung mathematischer Begabung (ab Jahrgangsstufe 7)
Rosenbrock: Aus Spiegelachsen Figuren bauen (ab Jahrgangsstufe 5)

Ausgabe 43 ist in Vorbereitung und wird sich mit der Förderung in Mathematik an Grundschulen befassen; es erscheint am 15.09.2005.

Der Verein hat während der letzten Jahre auch Lehrern Überstunden an Schulen bezahlen können, an denen keine öffentlichen Mittel für den Ergänzungsunterricht zur Verfügung gestanden haben. Der Rückgang der deutschen Wirtschaft hat die Finanzmittel des Vereins erheblich schrumpfen lassen, so dass solche Fördermaßnahmen im Moment nicht möglich sind. Wir hoffen, das entstandene Haushaltsloch durch eine größere Mitgliederzahl schließen zu können (Jahresbeitrag 36 € bei freiem Bezug der Zeitschriften „Mathematikinformation“ und „Mitteilungen für Vereinsmitglieder“).

Karlhorst Meyer

Neues Unterrichtskonzept durch selbstgesteuertes Lernen

Erlebnisbericht über „Seminar-Workshop" Spieltheorie

Am Ende des Wintersemesters 2003/04 hingen im Mathematischen Institut Ankündigungen zu einem Kurs/Workshop „Spieltheorie – Modelle der Entscheidungsfindung" aus. In diesem Workshop sollte ein neues Unterrichtskonzept – Interaktiver Unterricht mit Notebookunterstützung und mit selbstgesteuertem Lernen – erprobt werden.
Nach der Anmeldung bekamen wir von Professor Schottenloher per e-mail einen Fragebogen zugeschickt, in dem wir Fragen zu folgenden Themen beantworten sollten, z. B.:

- was erwarten wir vom Workshop?
- was für Ideen haben wir zum Arbeiten mit den Notebooks?
- unsere Kenntnisse in Programmieren/ Umgang mit Computern
- und in der Mathematik…

Zu diesem Zeitpunkt wussten Professor Schottenloher und sein Assistent Herr Linde auch noch nicht so genau, wie die Notebooks am besten im Kurs eingesetzt werden sollten, und auch die Gestaltung des Kurses war noch nicht festgelegt. Der Fragebogen war somit unsere erste Möglichkeit, beim Aufbau und bei der Organisation des Kurses mitzubestimmen. Diese Beteiligung galt dann für das ganze Semester: Es gab viele Möglichkeiten, aber auch die Verpflichtung, am Fortgang der Veranstaltung mitzuwirken. Beispielsweise waren die Teilnehmer an der Auswahl der Themen für die Lektionen und an der Durchführung des eigentlichen Workshops beteiligt wie auch an der Entscheidung, welche Projekte in Angriff genommen werden sollten.

Aufbau des gesamten Kurses mit Workshop

Der Kurs war gegliedert in 2 Stunden Vorlesung und 4 Stunden Workshop pro Woche. Die Vorlesung war in Lektionen gegliedert. Jede Woche wurden die Grundzüge zu einem neuen Thema der Spieltheorie in einer in sich abgeschlossenen Lektion vermittelt. Die Lektionen waren stärker auf Beispiele und Modellbildung ausgerichtet als das sonst in mathematischen Vorlesungen üblich ist. Anschließend wurden die Lektionen von Teilnehmern ausgearbeitet und ergänzt. Wer Interesse an diesen Ausarbeitungen hat, kann sich die Lektionen unter http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/ anschauen.
Neben der Homepage gab es noch zwei weitere Plattformen, mit denen wir interaktiv gearbeitet haben: Wikiludia und den Joint Account.
Der Joint Account ist ein Verzeichnis des Mathe-Cip-Pools, in dem wir unsere wöchentlichen Übungaufgaben abgegeben haben und Berichte zum Fortgang unserer Projekte und die Projektvorträge veröffentlicht haben.
Wikiludia ist die interaktive Homepage (http://wikiludia.mathematik.uni-muenchen.de/wiki/index.php/Wikiludia), an der jeder Teilnehmer mitarbeiten konnte und sollte. Wikiludia kann als ein Projekt verstanden werden, eine Enzyklopädie über Theorie und Anwendungen der Spieltheorie zu schreiben, die im Internet jedem zugänglich ist, und die effizient verlinkt ist. Natürlich war es nicht wichtig, eine solche Enzyklopädie wirklich abzuschließen, sondern es ging darum, auf dem Weg zu diesem Unterfangen zu verschiedenen Aspekten der Spieltheorie eigene Beiträge zu leisten. So wurden Definitionen, Beweise,

Beispiele von Spielen, historische Bemerkungen etc. von den Teilnehmern direkt online erstellt und damit allen anderen vorgestellt. Die so entstandenen Artikel konnten auch von anderen Teilnehmern erweitert werden. Eine Bearbeitung eines Artikels in Wikiludia sah folgendermaßen aus:

In dem Workshop hatten wir u. a. die Möglichkeit, Fragen zum Stoff der Vorlesung zu stellen, organisatorische Probleme zu besprechen, Teams zu bilden und Lösungvorschläge zu besprechen und vor allem unsere Projekte vorzustellen und damit den Vortrag zu halten, der für einen Seminarschein notwendig ist. Die Projekte waren Bearbeitungen von beliebigen Themen aus der Spieltheorie alleine oder in der Gruppe.

Fazit

Der Seminar-Workshop Spieltheorie war ziemlich arbeitsaufwendig. Beispielsweise die Bearbeitung der Übungsaufgaben: Die Aufgaben musste man sich selber aussuchen und dann ausführlich motivieren, genau beschreiben, selbstverständlich gut lösen und schließlich in einen Gesamtzusammenhang stellen. Punkte zum Erwerb des Scheines konnte man durch diese Aufgaben, durch das Schreiben von Lektionen, durch das Erstellen von Artikeln in Wikiludia und natürlich durch die Projektarbeit und ihre Präsentation erwerben. Meiner Meinung nach hat man durch das selbstständige Arbeiten viel mehr gelernt als in einer normalen Vorlesung, auch wenn das selbstgesteuerte Lernen viel mehr Zeit gekostet hat. Wenn eine Vorlesung in dieser Art noch einmal angeboten wird, werde ich jederzeit wieder dran teilnehmen, da wird mich auch ein organisatorisches Chaos, wie es in dem hier beschriebenen Kurs am Anfang vorherrschte, nicht abschrecken.

Stellungnahme zur Notebookbenutzung

Die Notebooks waren sicherlich sehr hilfreich bei der Vorlesung, aber nicht notwendig. Man hätte den Kurs auch ohne Notebook abhalten können. Die Verwendung der Notebooks hat aber vieles erleichtert, wie z. B. die Vorträge über die Projekte. Man konnte daheim den Vortrag erstellen und in der Uni, und dann mithilfe eines Beamers als Präsentation vortragen.
Das Arbeiten mit den Notebooks hat sicherlich auch dazu beigetragen, dass man sicherer mit dem Computer umgeht.

Birgit Kremnitz

Perron-Frobenius Theory and Games by the Seashore

Roger D. Nussbaum*

1 Games by the Seashore

Sometimes even simple games can involve serious mathematics. In this spirit, let us imagine a mathematically inclined child (call him Max) playing with sand by the seashore. Max has n large containers C_i, $1 \leq i \leq n$; and container C_i contains a volume x_i of sand. To avoid possible technical difficulties, let us assume that, for $1 \leq i \leq n$, the volume of container C_i is greater than $a \geq \sum_{j=1}^{n} x_j$. Associated with container C_i, Max has smaller containers $C_{ij}, 1 \leq j \leq n_i$; and C_{ij} has volume $a_{ij} > 0$. Again, to avoid possible problems, we suppose that for $1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \geq a$. Finally – and this is where the mathematics enters – Max has in mind a *fixed* function γ which assigns to each ordered pair of integers (i,j) with $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i$, an integer $k := \gamma(i,j)$ with $1 \leq k \leq n$.

With these preliminaries, we can describe Max's sand-shifting game. Max pours sand from container C_i into container C_{i1} until either (a) container C_{i1} is full or (b) C_i is empty. If Max has filled C_{i1} (so case (a) holds) he continues his procedure with container C_{i2}, i.e., he pours sand from C_i into C_{i2} until either (a) C_{i2} is full or (b) C_i is empty. Continuing in this way, Max eventually transfers all of the sand from C_i to the containers $C_{ij}, 1 \leq j \leq n_i$. He does this for all containers $C_i, 1 \leq i \leq n$. For all (i,j) Max now pours the sand from container C_{ij} into C_k, where $k = \gamma(i,j)$. In this way all the containers C_{ij} are emptied and, for $1 \leq k \leq n$, container C_k receives a total volume y_k of sand. Of course the total volume of sand remains constant, so $\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Being a mathematically inclined and precocious child, Max now asks himself what will happen if he repeatedly carries out the above procedure, always using the same rule γ. Will any patterns emerge?

*Partially supported by NSF DMS 0401100

2 A mathematical formulation

Let $K^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0$ for $1 \leq i \leq n\}$. If $x \in K^n$ satisfies $\sum_{i=1}^n x_i \leq a$, we have given a "sand-shifting" procedure to associate to x a vector $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) := f(x)$ with $\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n x_i \leq a$. If b and c are real numbers, define $b \vee c = \max\{b, c\}, b \wedge c = \min\{b, c\}$, and $b^+ = \max\{b, 0\}$. If $M_{ik}(x)$ denotes the volume of sand which Max puts into container C_{ik}, one can check that

$$M_{ik}(x) = \Big(x_i - \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij}\Big)^+ \wedge a_{ik} \qquad (1)$$

for $1 \leq k \leq n_i$. It follows that y_m, the total volume of sand moved to C_m, is given by

$$y_m = \sum_{\gamma(i,k)=m} M_{ik}(x) =: f_m(x). \qquad (2)$$

If $D = \{x \in K^n | \sum_{i=1}^n x_i \leq a\}$, equation (2) defines a map $f : D \to D$, where $f_m(x)$ in equation (2) is the m^{th} coordinate of $f(x)$.

Max's question can now be formulated as follows: Given $x \in D$, what can be said about the iterates $f^k(x)$, where f^k denotes the composition of f with itself k times?

It is first useful to extend f to a map of K^n to itself. Let $S = \{1, 2 \ldots, n\}$, let $\mathbb{N}$ denote the positive integers and let $\gamma : S \times \mathbb{N} \to S$ be any extension of our original map γ. For $j > n_i$ and $1 \leq i \leq n$, let $a_{ij} > 0$ denote any positive numbers such that $\sum_{j=1}^\infty a_{ij} = \infty$. For any $x \in K^n$, we can now define $f_m(x)$, the m^{th} coordinate of $f(x)$, by equation (2), and $f : K^n \to K^n$ is a map which extends our original map f.

In general, a map $g : K^n \to K^n, g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$ is called "integral-preserving" if, for all $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$,

Oskar Perron, 1880 – 1975

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) = \sum_{i=1}^n x_i. \qquad (3)$$

For $x, y \in \mathbb{R}^n$, we shall write $x \leq y$ if $y - x \in K^n$, and we shall call the map g "order-preserving" if $g(x) \leq g(y)$ whenever $x, y \in K^n$ and $x \leq y$. If g is integral-preserving and order-preserving, a result of Crandall and Tartar [2] implies that, for all $x, y \in K^n$,

$$\| g(x) - g(y) \|_1 \ \leq \ \| x - y \|_1, \qquad (4)$$

where, for $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $\| z \|_1$ is defined by

$$\| z \|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|. \qquad (5)$$

One can check that our original map $f : K^n \to K^n$ is integral-preserving, since this just means that the total volume of sand remains constant; and it is also easy to see that f is order-preserving, so f satisfies

$$\| f(x) - f(y) \|_1 \ \leq \ \| x - y \|_1 \qquad (6)$$

for all $x, y \in K^n$.

The map f is, of course, not linear in general; but we can obtain some insight into Max's question by considering a linear analogue. An $n \times n$ matrix $B = (b_{ij})$ is called nonnegative if $b_{ij} \geq 0$ for all i, j. If we write elements of $\mathbb{R}^n$ as $n \times 1$ column vectors, a nonnegative matrix B induces an order-preserving map $g : K^n \to K^n$ by $g(x) = Bx$. Almost one hundred years ago, O. Perron [10] and G. Frobenius [3, 4] developed a beautiful theory of nonnegative matrices; and generalizations of that theory are still of great interest today.

If B is an $n \times n$ nonnegative matrix and $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1$ for $1 \leq j \leq n$, then B is called a column-stochastic matrix, and $g(x) := Bx$ is integral-preserving and order-preserving and hence satisfies equation (4). In general, for a column-stochastic matrix B, it certainly need not be true that $B^k x = g^k(x)$ converges as $k \to \infty$ (think of $g((x_1, x_2, x_3)) = (x_3, x_1, x_2))$. However, the following result follows easily from classical Perron-Frobenius theory (see section 9 of [8]): For each collection of positive integers J, let $\mathrm{lcm}(J)$ denote the least common multiple of the integers in J. Define $R(n)$ to be the set of "orders of elements of the symmetric group on n letters", so

$$R(n) := \{\mathrm{lcm}(J) \mid \sum_{j \in J} j \leq n\}. \qquad (7)$$

Then, for any $x \in K^n$, there exists $p = p(x) \in R(n)$ and $\xi = \xi(x) \in K^n$ such that $B^{kp}(x) \to \xi$ as $k \to \infty$ and $B^p \xi = \xi$. For every $p \in R(n)$, there is a column-stochastic matrix B and $\xi \in K^n$ such that $B^p \xi = \xi$ and $B^j \xi \neq \xi$ for $1 \leq j < p$.

A natural conjecture (if one is an optimist) is that a similar result holds for our original map f or, more generally, for maps $g : K^n \to K^n$ which satisfy equation (4) and $g(0) = 0$. Rather surprisingly, this conjecture is true. Even more surprisingly, one can define an exact analogue of the set $R(n)$ for the class of maps $g : K^n \to K^n$ which satisfy equation (4) and $g(0) = 0$. Furthermore, all the essential difficulties already arise for our original class of sand-shifting maps, even if we restrict $a_{ij} = 1$ for all i, j.

Ferdinand Georg Frobenius, 1849 – 1917

3 Deeper Waters

Although our original problem arose on the seashore, we now must (metaphorically speaking) move to deeper waters. Over the past eighteen years, surprisingly detailed answers to Max's question have been obtained. We shall now describe without proof some relevant theorems and mention some open questions.

For $n \geq 1$, we define $\mathcal{F}_3(n)$ to be the collection of all maps $g : K^n \to K^n$ such that

(a) $g(0) = 0$ and

(b) g satisfies equation (4).

Our starting point is the following theorem of Akcoglu and Krengel [1].

Theorem 1. *If $g \in \mathcal{F}_3(n)$ and $x \in K^n$, there exists $\xi = \xi(x) \in K^n$ and $p = p(x) \leq n!$ such that $\lim_{k\to\infty} g^{kp}(x) = \xi$ and $g^p(\xi) = \xi$.*

Theorem 1 is a direct analogue of the linear result which we mentioned earlier, but is there a precise analogue in the context of Theorem 1 of the set $R(n)$ in equation (7)? Michael Scheutzow has proved in [11] that $p(x)$ in Theorem 1 in fact satisfies $p(x) \leq \mathrm{lcm}(\{1, 2, \ldots, n\})$, which is much smaller than $n!$, so even the upper bound in Theorem 1 is far from optimal.

To make our problem precise we define a set $P_3(n)$ by

$$\begin{aligned} P_3(n) := \{p \geq 1 \mid \exists g \in \mathcal{F}_3(n) \text{ and } \\ \xi \in K^n \text{ with } g^p(\xi) = \xi \\ \text{and } g^j(\xi) \neq \xi \text{ for } 1 \leq j < p\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Thus, $P_3(n)$ is the set of possible periods of periodic points of maps $g \in \mathcal{F}_3(n)$.

In [7] Nussbaum, Scheutzow, and Verduyn Lunel define, for each integer $n \geq 1$, a set of positive integers $Q(n)$. The definition of $Q(n)$ is given *solely in terms of certain simple combinatorial and number theoretic constraints*, but we omit the simple definition here. The basic result in [7] is that

$$P_3(n) = Q(n) \tag{9}$$

A consequence of equation (9) is that, for purposes of describing $P_3(n)$, one can restrict to sand-shifting maps.

Theorem 2 *(see [7]). If $p \in P_3(n)$, there exist a sand-shifting map $f : K^n \to K^n$ with $a_{ij} = 1$ for all i, j and $\xi \in K^n$ with $f^p(\xi) = \xi$ and $f^j(\xi) \neq \xi$ for $1 \leq j < p$.*

Zur Theorie der Matrices.

Von

Oskar Perron in München.

In dieser Note werden zum Teil bekannte Sätze aus der Theorie der Matrices und ihrer charakteristischen Gleichung auf neue, höchst einfache Weise bewiesen, zum Teil neue Sätze entwickelt. Unter den Anwendungen der Theorie hebe ich ein der Gräffeschen Methode analoges Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung hervor.

⋮

Satz: *Wenn alle a_{ik} reell und > 0 sind, so hat die charakteristische Gleichung eine einfache positive Wurzel, welche alle anderen Wurzeln an absolutem Betrag übertrifft.*

Perron's theorem on the eigenvalues of matrices $A = (a_{ik})$ with positive entries, see [10], pp. 248, 261.

It remains to describe the set $P_3(n) = Q(n)$ more explicitly, but in fact the structure of $P_3(n)$ for $n > 50$ remains poorly understood (see [8] and [9]). There are some general observations which are helpful, however.

If $p \in P_3(n)$ and d is a divisor of p, then one can see that $d \in P_3(n)$. Thus we define $p \in P_3(n)$ to be a "maximal element of $P_3(n)$" if $jp \notin P_3(n)$ for $j \geq 2$, and $P_3(n)$ comprises precisely the set of all divisors of the maximal elements of $P_3(n)$.

If $p_1 \in P_3(n_1)$ and $p_2 \in P_3(n_2)$, one can prove (see [7] and [8]) that

$$\operatorname{lcm}(p_1, p_2) \in P_3(n_1 + n_2).$$

We shall call this property of a collection of sets of integers "rule A".

If $p_1, p_2, \ldots, p_r \in P_3(m)$, one can also prove that

$$r \operatorname{lcm}(p_1, p_2, \ldots, p_r) \in P_3(rm).$$

We shall call this property "rule B".

If we define $P(1) = \{1\}$, we can define $P(n)$ to be the minimal set of positive integers such that the collection $\{P(n) | n \geq 1\}$ satisfies rules A and B. Thus we always have that

$$P(n) \subset P_3(n),$$

and one can show that

$$R(n) \subset P(n).$$

Also, one can see that if $p \in P(n)$ and d is a divisor of p, then $d \in P(n)$, so $P(n)$ comprises precisely all divisors of maximal elements of $P(n)$.
The sets $P(n)$ can be computed by hand for $n \leq 20$ and calculated with the aid of a computer for relatively large values of n (see [8]). Furthermore Nussbaum and Verduyn Lunel [8] have proved

Theorem 3. We have $P(n) = P_3(n)$ for $1 \leq n \leq 50$.

One might hope that $P(n) = P_3(n)$ for all n, but it is proved in section 7 of [8] that $P(78) \neq P_3(78)$; and it is unclear how closely $P(n)$ "approximates" $P_3(n)$ for general n. Results in [9] suggest that a deeper understanding of $P_3(n)$ may involve some subtle number theoretical questions. However, Theorem 3 provides Max with some practical guidance. If $R(n)$ were equal to $P_3(n)$ for $n \leq 20$, Max might justifiably replace his cumbersome sand-shifting scheme by a simpler procedure. However, although $R(n) = P_3(n)$ for $1 \leq n \leq 5$ and $n = 7$, $R(n)$ is strictly smaller than $P_3(n)$ for all other n (see [8] and [9]). The following table from [8] lists the maximal elements of $P_3(n)$ for $1 \leq n \leq 18$. Recall that $P_3(n)$ comprises all divisors of its maximal elements.

n	Maximal elements of $P_3(n)$
1	[1]
2	[2]
3	[2,3]
4	[3,4]
5	[4,5,6]
6	[5,12]
7	[7,10,12]
8	[7,10,15,24]
9	[14,15,18.20,24]
10	[14,18,21,24,40,60]
11	[11,18,21,24,28,40,60]
12	[11,28,35,36,42,120]
13	[13,22,35,36,84,120]
14	[13,22,33,36,90,120,140,168]
15	[26,33,44,105,120,140,168,180]
16	[26,39,44,55,66,126,140,180,210,240,336]
17	[17,39,52,55,72,126,132,180,240,280,336, 420]
18	[17,52,65,77,78,110,132,144,240,252,280, 336,360,420]

Looking at the above table, one can see that Max needs at least six containers C_i (so $n \geq 6$) in order to obtain a number p as in Theorem 2 which cannot be achieved simply by permuting the contents of the containers C_i.

An amusing exercise for the reader is to find explicitly an integral-preserving, order-preserving map $f : K^6 \to K^6$ and a point $\xi \in K^6$ such that $f^{12}(\xi) = \xi$ but $f^j(\xi) \neq \xi$ for $1 \leq j < 12$. The existence of such an f is guaranteed by the previous results and f cannot be given by a column-stochastic matrix.

References

[1] M. A. Akcoglu and U. Krengel, *Nonlinear models of diffusion on a finite space*, Probab. Theory Related Fields **76** (1987), 411-420.

[2] M. G. Crandall and L. Tartar, *Some relations between nonexpansive and order preserving mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 385-391.

[3] G. Frobenius, *Über Matrizen aus positiven Elementen*, S.-B. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1909), 514-518.

[4] G. Frobenius, *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, S.-B. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1912), 456-477.

[5] B. Lemmens and M. Scheutzow, *A characterization of the periods of periodic points of 1-norm nonexpansive maps*, Selecta Mathematica **9** (2003), 557-578.

[6] R. D. Nussbaum, *A nonlinear generalization of Perron-Frobenius theory and periodic points of nonexpansive maps*, Contemporary Math. **204** (1997), 187-198.

[7] R. D. Nussbaum, M. Scheutzow and S. Verduyn Lunel, *Periodic points of nonexpansive maps and nonlinear generalizations of Perron-Frobenius theory*, Selecta Mathematica **4** (1998), 141-181.

[8] R. D. Nussbaum and S. Verduyn Lunel, *Generalizations of the Perron-Frobenius theorem for nonlinear maps*, Mem. Amer. Math. Soc. **138** (659) (1999), 1-98.

[9] R. D. Nussbaum and S. Verduyn Lunel, *Asymptotic estimates for the periods of periodic points of nonexpansive maps*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **23** (2003), 1199-1226.

[10] O. Perron, *Zur Theorie der Matrices*, Math. Annalen **64** (1907), 248-263.

[11] M. Scheutzow, *Periods of nonexpansive operators on finite l_1-spaces*, Eur. J. Comb. **9** (1988), 73-81.

Prof. Roger D. Nussbaum
Department of Mathematics, Hill Center
Rutgers University
110 Frelinghuysen Road
Piscataway, New Jersey
U.S.A. 08854-8019

Wir bedanken uns ganz herzlich bei Frau *Irmgard Hellerbrand*, einer Enkelin Oskar Perrons, für das freundliche Zurverfügungstellen eines Photos ihres Großvaters, sowie bei der *Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften* für das Übersenden und die Abdruckgenehmigung des Bildes von F. Georg Frobenius. Ein extra Dank geht auch an Frau *Luise Kopp* für die Illustration des sandspielenden Max.

OEHLER

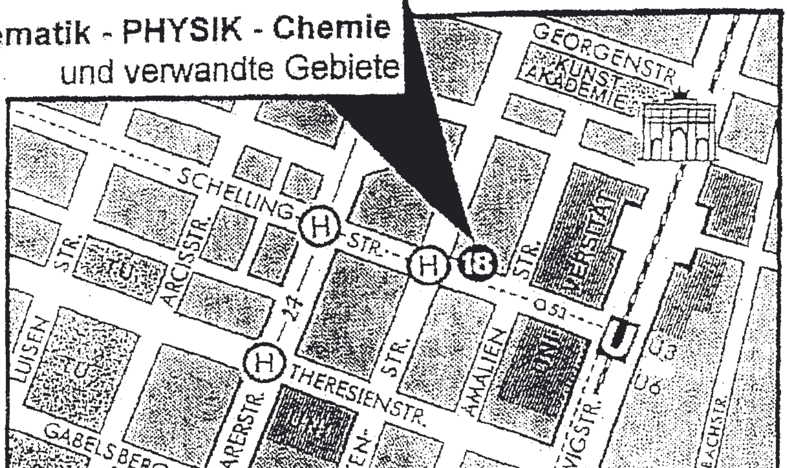
Buchhandlung an der Universität München

Schellingstr. 18 · 80799 München · Deutschland
Telefon 0 89/28 60 25 · Telefax 0 89/2 80 52 71

Yellow Sale

March 1, 2005 – July 31, 2005

Mathematik - PHYSIK - Chemie
und verwandte Gebiete



e-mail: oehler@oehlerbuch.com


Vorsprung erzielen.
Hochschulabsolventen/-innen
Global Markets
Sie nehmen Herausforderungen an. Sie setzen auf Vorsprung.
Die Deutsche Bank teilt Ihre Leidenschaft durchzustarten, nach vorne zu denken, Chancen zu ergreifen. Starten Sie Ihre Karriere mit uns!
In Global Markets setzen wir auf Ihre Kenntnisse der Kapitalmärkte, analytischen Fähigkeiten und Ihren Teamgeist. Sie bringen frische Ideen und innovative Lösungen in unsere Handelsräume. Sie zählen zu den Besten Ihrer Klasse und sind immer einen Schritt voraus!
Für weitere Informationen kontaktieren Sie bitte:
Audrey Herz, audrey.herz@db.com, +49 (69) 910-31383.
Sind Sie bereit? Bewerben Sie sich jetzt online!
www.db.com/careers
Leistung aus Leidenschaft.
Deutsche Bank