MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H.-D. Donder

WS 09/10
Blatt 5
23.11.09

Übungen zu Analysis I (für Mathematiker)

1. Sei $0 \leq q < 1$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \;\leq\; q \cdot |a_{n+1} - a_n| \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

   Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(4 Punkte)

2. Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_0 \;=\; 1, \qquad a_{n+1} \;=\; \frac{2+a_n}{1+a_n}$$

   Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(4 Punkte)

3. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz oder Divergenz

$$(a)\;\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \qquad (b)\;\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{k^2+3k+1}$$

$$(c)\;\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad (d)\;\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^4+1}{3k^4+k^2}\right)^{2k}$$

(4 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass es zu jeder reellen Zahl $0 < a \leq 1$ eine Folge natürlicher Zahlen $1 < m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ gibt, so dass gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m_k} \;=\; a$$

(4 Punkte)

Abgabetermin: Montag, den 30. November 2009, 14.30 Uhr
(Gekennzeichneter Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek).