

Übungen zu Analysis I (für Mathematiker)

1. Sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + (\frac{1}{2})^n, & \text{falls } n = 3k & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & \text{falls } n = 3k + 1 & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & \text{falls } n = 3k + 2 & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(4 Punkte)

2. Sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(4 Punkte)

3. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Teilfolge besitzt.

(4 Punkte)

4. Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, und sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.

Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$.

(4 Punkte)

Abgabetermin: Montag, den 23. November 2009, 14.30 Uhr
(Gekennzeichneter Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek).