MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H.-D. Donder

WS 09/10
Blatt 13
1.2.10

2. Probeklausur zu Analysis I (für Mathematiker)

1. (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-2}{k-1} x^k \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}+1$$

   (b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) \;=\; \frac{x^2}{1-x^2}\,.$$

   Stellen Sie f durch eine Potenzreihe dar und bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

(4 Punkte)

2. (a) Sei

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\cosh x - 1}{x}, & x \neq 0 \\[2ex] 0, & x = 0 \end{cases}$$

   mit $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Prüfen Sie die Differenzierbarkeit von f und geben Sie, falls existent, die Ableitung in $x = 0$ an.

   (b) Ist die Funktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ -e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

   in $\mathbb{R}$ differenzierbar?

(4 Punkte)

3. Berechnen Sie die Ableitung von

   (a) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) \;=\; |\sin x| \cdot \sin x$

(4 Punkte)

4. Gegeben sei eine nullstellenfreie, differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1,\ f(1) = e$.
   Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass es ein $c \in (0,1)$ gibt, so dass

$$f'(c) \;=\; f(c).$$

(4 Punkte)

Abgabetermin: Montag, den 8. Februar 2010, 14.30 Uhr
(Gekennzeichneter Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek).