MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H.-D. Donder

WS 09/10
Blatt 10
11.1.10

Übungen zu Analysis I (für Mathematiker)

1. Die Funktionen $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \end{aligned}$$

Man zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

(b) $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$

(c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(4 Punkte)

2. (a) Zeigen Sie, dass $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

(b) Gemäß (a) sei Arsinh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von $\sinh$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\,\right).$$

(4 Punkte)

3. Sei $r > 0$. Zeigen Sie, dass

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^r} = \infty$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^r} = 0$

(4 Punkte)

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{falls } x \le 1 \\ x^2 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in 1 differenzierbar ist, und bestimmen Sie $f'(1)$. (4 Punkte)

Abgabetermin: Montag, den 18. Januar 2010, 14.30 Uhr
(Gekennzeichneter Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek).