LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Sommersemester 2010
11. Juni 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 8

Aufgabe 8.1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$, und sei $g : [a, b] \to N$ eine Kurve in der Niveaufläche

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}.$$

Zeigen Sie, dass der Gradient von f in jedem Kurvenpunkt $x = g(t)$ senkrecht auf der Kurve steht, das heißt, $\mathrm{grad} f(x) \cdot g'(t) = 0$.

Aufgabe 8.2. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, f(x) = \left(\dfrac{-x_2}{\|x\|}, \dfrac{x_1}{\|x\|} \right)$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x) = (x_1 \cos(x_3) - x_2 \sin(x_3), x_1 \sin(x_3) + x_2 \cos(x_3))$

Aufgabe 8.3. Fassen Sie die Ebene der komplexen Zahlen als Vektorraum $\mathbb{R}^2$ auf und differenzieren Sie die folgenden Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Was fällt auf?

$$f(z) = z^2 \qquad g(z) = e^z \qquad h(z) = (2 + 3i)z$$

Aufgabe 8.4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x, y \in U$ gilt: $\|f(x) - f(y)\| \leq M \cdot \|x - y\|$. M heißt dann *Lipschitz-Konstante*. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = (\sin(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \cos(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}))$ is Lipschitz-stetig.

(b) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar und Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $M \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $\|f'(x)\| \leq M$.

(c) Ist $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit Länge L, und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $M \in \mathbb{R}$, so ist $f \circ g$ rektifizierbar und hat Länge $\leq LM$.