LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler

14. Mai 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Da Sinus und Cosinus genau die Werte mit Betrag ≤ 1 annehmen, ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\cos(kx)}{k^3}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k'\| = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{-k\sin(kx)}{k^3}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k'\|$ konvergieren also. Aus dem Konvergenzkriterium von Weierstraß folgt nun, dass sowohl $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig (also insbesondere auch punktweise) gegen ein stetiges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als auch $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ gleichmäßig gegen ein stetiges $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Daraus folgt dann auch, dass f stetig differenzierbar ist mit $f' = g$.

Aufgabe 2: Da für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \geq 1$

$$\begin{aligned} |f_k(x)| &= \left|\frac{1}{x^2+k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{und} \\ |f_k'(x)| &= \left|\frac{-2x}{(x^2+k^2)^2}\right| = \frac{1}{x^2+k^2} \cdot \frac{2|x|}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2|x| + (|x|-1)^2}{x^2+k^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{x^2+1}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

gilt, ist die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine Majorante sowohl von $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$, als auch von $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k'\|$. Beide konvergieren also und damit folgt die stetige Differenzierbarkeit wieder mit dem gleichen Argument wie in Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$0 \leq \|(f_n + g_n) - (f + g)\| = \|(f_n - f) + (g_n - g)\| \leq \|f_n - f\| + \|g_n - g\|.$$

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f bzw. g konvergieren, streben die beiden Summanden auf der rechten Seite für $n \to \infty$ gegen null. Also muss auch

$$\lim_{n\to\infty} \|(f_n + g_n) - (f + g)\| = 0$$

sein. Das bedeutet aber, dass $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f + g$ konvergiert.

Aufgabe 4: Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(Die Idee ist, den Abstand von $f(x)$ zu $f(y)$ durch die Abstände von $f(x)$ zu $f_m(x)$ zu $f_m(y)$ zu $f(y)$ abzuschätzen. Wenn wir zu gegebenem ε ein m und ein δ finden können, so dass jeder dieser drei Abstände kürzer als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist, ist das Ziel erreicht.
$f(x)$ und $f_m(x)$ bzw. $f(y)$ und $f_m(y)$ können nicht weiter als $\|f_m - f\|$ voneinander entfernt sein. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz strebt dieser Wert gegen 0, so dass wir nur ein hinreichend großes m wählen müssen. Für die Strecke von $f_m(x)$ zu $f_m(y)$ können wir die gleichmäßige Stetigkeit von f_m ausnutzen: Wir müssen δ so wählen, dass auch sie kürzer als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist.)

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m$ gilt: $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Insbesondere ist $\|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nun ist f_m nach Voraussetzung gleichmäßig stetig, also gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $|f_m(x) - f_m(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dieses δ bezeugt die gleichmäßige Stetigkeit von f. Seien nämlich $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(y) + f_m(y) - f(y)| \\
&\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)| \\
&\leq \|f - f_m\| + |f_m(x) - f_m(y)| + \|f_m - f\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$