LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler

19. April 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

(a) $\int_0^1 \left(e^{2x}+2x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x + 2\cdot \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 + 2\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{6}$

(b) Wir wenden die Substitutionsregel mit $\varphi(x) = -x^2+2$ an:
$\int_0^2 xe^{-x^2+2}\mathrm{d}x = \int_0^2 -\frac{1}{2}\varphi'(x)e^{\varphi(x)}\mathrm{d}x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} -\frac{e^y}{2}\mathrm{d}y = -\frac{e^y}{2}\Big|_2^{-2} = \frac{e^2-e^{-2}}{2}$

(c) Die Substitutionsregel mit $\cos(x)$ liefert:
$\int_0^\pi \sin(x)e^{\cos(x)}\mathrm{d}x = \int_0^\pi -\cos'(x)e^{\cos(x)}\mathrm{d}x = -\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} e^y\mathrm{d}y = -e^y|_1^{-1} = e - \frac{1}{e}$

Aufgabe 2:

(a) Hier führt partielle Integration mit $f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = x^2$ zum Ziel:
$\int x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^2}{3}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9}$

(b) Wegen $\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$ versuchen wir partielle Integration mit $f(x) = \frac{x^2}{2}$ und $g'(x) = 2xe^{x^2}$. Da dann $\frac{g}{2}$ eine Stammfunktion von xe^{x^2} ist, erhalten wir:
$\int x^3e^{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{2}\left(2xe^{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} = \frac{x^2-1}{2}e^{x^2}$

(c) Wir integrieren so lange partiell, wobei wir die Potenzen von x ableiten, bis nur noch Winkelfunktionen übrig bleiben:
$\int x^2\sin(x)\mathrm{d}x = x^2(-\cos(x)) - \int 2x(-\cos(x))\mathrm{d}x = -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\mathrm{d}x = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\int \sin(x)\mathrm{d}x = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) = (2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x)$

Aufgabe 3: Da f stetig ist, ist nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x |t|\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion. Für $x \geq 0$ ist also

$$F(x) = \int_0^x |t|\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{d}t = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

und für $x < 0$ ist

$$F(x) = \int_0^x |t|\mathrm{d}t = \int_0^x (-t)\mathrm{d}t = -\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = -\frac{x^2}{2}.$$

Insgesamt ist also:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{falls } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & \text{falls } x < 0 \end{cases}, \text{ oder etwas eleganter:} \quad F(x) = \frac{x \cdot |x|}{2}$$

Aufgabe 4: Da f stetig ist, ist nach dem Fundamentalsatz $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, G(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t = G(h(x)) - G(g(x)).$$

Nach der Kettenregel ist dies differenzierbar mit:

$$F'(x) = G'(h(x))h'(x) - G'(g(x))g'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$