LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler, Parmenides Garcia Cornejo

Sommersemester 2010
27. Juni 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungskizze Übungsblatt 10

Lemma 1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und seien f, g: $U \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in a. Dann $D_i(fg)(a) = f(a)D_ig(a) + g(a)D_if(a)$.*

Proof. Sei $e_1 := (1,0,...,0)$, $e_2 := (0,1,...,0)$, ..., $e_n := (0,0,...,0,1)$ die kanonische Basis von Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$. Dann

$$D_i(fg)(a) = \operatorname*{Lim}_{h\longrightarrow 0} \frac{(fg)(a+he_i) - (fg)(a)}{h} =$$

$$\operatorname*{Lim}_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+he_i)g(a+he_i) + f(a+he_i)g(a) - f(a+he_i)g(a) - f(a)g(a)}{h} =$$

$$\operatorname*{Lim}_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+he_i)g(a+he_i) - f(a+he_i)g(a) + f(a+he_i)g(a) - f(a)g(a)}{h} =$$

$$\operatorname*{Lim}_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+he_i)(g(a+he_i) - g(a)) + g(a)(f(a+he_i) - f(a))}{h} =$$

$$\operatorname*{Lim}_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+he_i)(g(a+he_i) - g(a))}{h} + \frac{g(a)(f(a+he_i) - f(a))}{h} =$$

$$\operatorname*{Lim}_{h\longrightarrow 0} f(a+he_i)\frac{(g(a+he_i) - g(a))}{h} + g(a)\frac{(f(a+he_i) - f(a))}{h} =$$

$$\operatorname*{Lim}_{h\longrightarrow 0} f(a+he_i)\frac{(g(a+he_i) - g(a))}{h} + \operatorname*{Lim}_{h\longrightarrow 0} g(a)\frac{(f(a+he_i) - f(a))}{h} =$$

$$f(a)D_ig(a) + g(a)D_if(a).$$ □

Lösung Aufgabe 1.

Auf der Andereseite

$$\nabla(fg)(a) = (D_1(fg)(a), ..., D_n(fg)(a)) \underset{\text{Nach Lemma 1.}}{=}$$

$$(f(a)D_1g(a) + g(a)D_1f(a), ..., f(a)D_ng(a) + g(a)D_nf(a)) =$$

$$(f(a)D_1g(a), ..., f(a)D_ng(a)) + (g(a)D_1f(a), ..., g(a)D_nf(a)) =$$

$$f(a)(D_1g(a), ..., D_ng(a)) + g(a)(D_1f(a), ..., D_nf(a)) =$$

$$f(a)\nabla g(a) + g(a)\nabla f(a).$$

Lösung Aufgabe 2.

$\triangle(fg)(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i D_i(fg)(x) \underset{\text{Nach Lemma 1.}}{=} \sum_{i=1}^{n} D_i(f(x) D_i g(x) + g(x) D_i f(x)) =$

$\sum_{i=1}^{n} D_i(f(x) D_i g(x)) + \sum_{i=1}^{n} D_i(g(x) D_i f(x)) \underset{\text{Nach Lemma 1.}}{=}$

$\sum_{i=1}^{n} (f(x)(D_i D_i g(x)) + D_i g(x) D_i f(x)) + \sum_{i=1}^{n} (g(x)(D_i D_i f(x)) + D_i f(x) D_i g(x)) =$

$f(x) \sum_{i=1}^{n} (D_i D_i g(x) + D_i g(x) D_i f(x)) + g(x) \sum_{i=1}^{n} ((D_i D_i f(x)) + D_i f(x) D_i g(x)) =$

$f(x) \triangle g(x) + \sum_{i=1}^{n} D_i g(x) D_i f(x) + g(x) \triangle f(x) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(x) D_i g(x) =$

$f(x) \triangle g(x) + g(x) \triangle f(x) + 2 \sum_{i=1}^{n} D_i g(x) D_i f(x) =$

$f(x) \triangle g(x) + g(x) \triangle f(x) + 2 f'(x) \cdot g'(x).$

Lösung Aufgabe 3.

$f(2\pi) - f(0) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) - (\cos 0, \sin 0) = (1, 0) - (1, 0) = (0, 0).$

Auf der andere Seite, $f'(\xi) \cdot 2\pi = (-\sin \xi, \cos \xi) 2\pi \neq (0, 0)$ für alle $\xi \in [0, 2\pi]$.

Lösung Aufgabe 4.

Sei $\delta > 0$ und $x, y \in U_\varepsilon(a)$ beliebig mit $\|x - y\| < \frac{\delta}{K+1}$.

Dann $[x, y] \subset U_\varepsilon(a)$ und für $M := \sup \{\|f'(\xi)\| \mid \xi \in [x, y]\} \leqslant K$ es gilt
$\|f(x) - f(y)\| \underset{\text{Schrankensatz}}{\leqslant} M \|x - y\| \leqslant M \frac{\delta}{K+1} < \delta.$

Also f ist gleichmässig stetig.