Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Lösungsvorschlag für Übungsblatt 9

# Klausurenkurs Algebra

## Aufgabe 1 **(Frühjahr 2003, Thema 1, Aufgabe 3)**

Ja: Als Unterring eines Körpers ist $R$ ein Integritätsring. Es ist zu zeigen, dass jedes $r \in R \setminus \{0\}$ invertierbar ist. Da $K$ algebraisch über $k$ ist, ist aber auch $r$ algebraisch, also ist $K[r] = \{\sum_{m=0}^{n} \alpha_i r^i \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}$ ein Körper und es gilt $r^{-1} \in K[r]$. Wegen $K[r] \subseteq R$ ist dann aber auch $r^{-1} \in R$.

## Aufgabe 2 **(Frühjahr 2003, Thema 2, Aufgabe 3)**

Die Formel gilt in jedem Körper mit Charakteristik 5, da $x \mapsto x^5$ in diesem Fall der Frobeniushomomorphismus ist, also etwa in $\mathbb{F}_5$. Sie gilt außerdem in $\mathbb{F}_2$:

$$(a+b)^5 = (a+b)^{1+4\varphi(2)} = (a+b)^1 = a^1 + b^1 = a^{1+4\varphi(2)} + b^{1+4\varphi(2)} = a^5 + b^5$$

und in $\mathbb{F}_3$:

$$(a+b)^5 = (a+b)^{1+2\varphi(3)} = (a+b)^1 = a^1 + b^1 = a^{1+2\varphi(3)} + b^{1+2\varphi(3)} = a^5 + b^5,$$

jeweils wegen des Satzes von Euler.

## Aufgabe 3 **(Herbst 2003, Thema 3, Aufgabe 4)**

**(a)** Es gilt $zX^2 = X^4 + 1$, also $X^4 - zX^2 + 1 = 0$. Somit ist $X$ Nullstelle des Polynoms $Y^4 - zY^2 + 1 = 0 \in \mathbb{Q}(z)[Y]$, hat also höchstens Grad 4 über $\mathbb{Q}(z)$.

**(b)** Is $\sigma$ ein solcher Automorphismus und $\sigma(X) = \frac{f}{g}$ mit teilerfremden Polynomen $f, g \in \mathbb{Q}(X)$. Wegen $\sigma(z) = z$ muss also $\frac{f^4+g^4}{f^2g^2} = \frac{f^2}{g^2} + \frac{g^2}{f^2} = X^2 + X^{-2} = \frac{X^4+1}{X^2}$ gelten. Da $f$ und $g$ teilerfremd sind, ist der Bruch auf der linken Seite vollständig gekürzt, also muss $f^4 + g^4 = X^4 + 1$ und $f^2g^2 = X^2$ sein. $\sigma(X)$ kann also genau die Werte $X$, $-X$, $X^{-1}$ und $-X^{-1}$ annehmen. Da ein Homomorphismus durch den Wert von $\sigma(X)$ vollständig gegeben ist, liefert dies genau die vier gesuchten Homomorphismen. Alle drei nichttrivialen Elemente haben Ordnung 2, also ist die Automorphismengruppe isomorph zur Kleinschen Vierergruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

**(c)** Da nach (b) die Körpererweiterung Grad 4 hat, ist $Y^4 - zY^2 + 1$ irreduzibel, also das Minimalpolynom von $X$ über $\mathbb{Q}(z)$. $X$, $X^{-1}$, $-X$ und $-X^{-1}$ sind genau seine vier Nullstellen, also ist das Polynom separabel und $\mathbb{Q}(X)$ genau sein Zerfällungskörper, also normal. Damit ist gezeigt, dass die Erweiterung galoissch ist.

Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie sind die Zwischenkörper genau die Fixkörper der Untergruppen der Galoisgruppe $\{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, wobei $\sigma_1(X) = -X$, $\sigma_2(X) = X^{-1}$ und $\sigma_3(X) = -X^{-1}$. $\sigma_1$ hat den Fixpunkt $X^2$. Da $X$ über $\mathbb{Q}(z, X^2)$ nur Grad 2 hat – es ist Nullstelle des Polynoms $Y^2 - X^2$ –, ist $X^2 \notin \mathbb{Q}(z)$. Also ist $\mathbb{Q}(z, X^2)$ der Fixkörper von $\langle\sigma_1\rangle$. $\sigma_2$ hat $X + X^{-1}$ als Fixpunkt. Da $X + X^{-1}$ nicht Fixpunkt von $\sigma_1$ ist, liegt es nicht im Grundkörper $\mathbb{Q}(z)$, also folgt wie im ersten Fall, dass $\mathbb{Q}(z, X + X^{-1})$ Fixkörper von $\langle\sigma_2\rangle$ ist. $\sigma_3$ hat schließlich $X - X^{-1}$ als Fixpunkt. Genau wie im zweiten Fall folgt, dass $\mathbb{Q}(z, X - X^{-1})$ Fixkörper von $\langle\sigma_3\rangle$ ist.

## Aufgabe 4 **(Frühjahr 2001, Thema 3, Aufgabe 1)**

Da $\mathbb{Q}$ perfekt ist, ist $K$ separabel über $\mathbb{Q}$, also gibt es ein primitives Element $\alpha \in K$, also ein Element mit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Sei $f$ das Minimalpolynom von $\alpha$. Dann ist $f$ separabel und vom Grad $n$, hat also genau $n$ verschiedene Nullstellen $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$. Durch $\sigma_i(\alpha) = \beta_i$ wird für jedes $i$ ein Körpermonomorphismus von $K$ nach $\mathbb{C}$ definiert. Nun ist $f$ ein Polynom mit reellen (sogar rationalen) Koeffizienten und hat daher mit jeder Nullstelle $\beta_i$ auch das komplex konjugierte $\overline{\beta_i}$ als Nullstelle. Die Anzahl der nicht-reellen Nullstellen ist also gerade, und damit auch die Anzahl der Homomorphismen mit nicht-reellem Bild. Ist nun $K/\mathbb{Q}$ galoissch, so zerfällt $f$ über $K$ in Linearfaktoren, also enthält $K$, und damit auch das Bild von $K$ unter einem Homomorphismus alle Nullstellen von $f$. Folglich haben alle Homomorphismen dasselbe Bild. Beispiele sind $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.