Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Übungsblatt 9

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 (Frühjahr 2003, Thema 1, Aufgabe 3)

Sei K eine algebraische Erweiterung des Körpers k und R ein Ring mit $k \subset R \subset K$. Folgt dann, dass R ein Körper ist?

Aufgabe 2 (Frühjahr 2003, Thema 2, Aufgabe 3)

Geben Sie drei Körper mit verschiedenen Charakteristiken an, für die die binomische Formel

$$(a+b)^5 = a^5 + b^5$$

für alle Körperelemente a, b gilt.

Aufgabe 3 (Herbst 2003, Thema 3, Aufgabe 4)

Gegeben sei das Element $z = X^2 + X^{-2}$ des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{Q}(X)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(X)$ über $\mathbb{Q}(z)$ endlich vom Grad ≤ 4 ist.

(b) Bestimmen Sie die Gruppe der Automorphismen von $\mathbb{Q}(X)$, die z festlassen.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(X)$ über $\mathbb{Q}(z)$ galoissch ist und geben Sie alle Körper zwischen $\mathbb{Q}(X)$ und $\mathbb{Q}(z)$ an.

Aufgabe 4 (Frühjahr 2001, Thema 3, Aufgabe 1)

$K/\mathbb{Q}$ sei eine endliche Körpererweiterung vom Grad n. Zeigen Sie, dass es genau n verschiedene Körpermonomorphismen von K nach $\mathbb{C}$ gibt und dass die Anzahl s derjenigen mit nicht-reellem Bild gerade ist. Mit $n = r + s$ weisen Sie $r = 0$ oder $s = 0$ für den Fall nach, dass $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist, und geben Sie Beispiele für beide Fälle.