Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Übungsblatt 6

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 (Frühjahr 2005, Thema 3, Aufgabe 3)

Geben Sie explizit einen Ring-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$$

und seine Umkehrung φ^{-1} an.

Aufgabe 2 (Frühjahr 2007, Thema 2, Aufgabe 2)

Es wird der Unterring $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{C}$ betrachtet. Mit $\varphi : R \to \mathbb{N}_0, a + ib\sqrt{2} \mapsto a^2 + 2b^2$ als euklidischer Funktion ist R ein euklidischer Ring (darf benutzt werden).

(a) Welche der Zahlen $2, 3, 5, 7, 11$ sind Primelemente in R?

(b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von 6 und $4 + i\sqrt{2}$ in R.

Aufgabe 3 (Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 4)

Zeigen Sie:

(a) Ist R ein Hauptidealring, so ist jedes vom Nullideal verschiedene Primideal in R ein maximales Ideal.

(b) Ist R ein Integritätsring und der Polynomring $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Körper.

Aufgabe 4 (Herbst 2005, Thema 2, Aufgabe 3)

Sei R ein (nullteilerfreier, kommutativer) Hauptidealring und $I = Ra$ ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal von R. Zeigen Sie, dass I nur in endlich vielen Idealen von R enthalten ist!