Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Übungsblatt 5

# Klausurenkurs Algebra

## Aufgabe 1 **(Frühjahr 2003, Thema 3, Aufgabe 4)**

Sei $K$ ein Körper und $R$ die Menge aller $2 \times 2$-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in K$. Bestimmen Sie alle nichttrivialen zweiseitigen Ideale $I$ des Ringes $R$.

## Aufgabe 2 **(Herbst 2003, Thema 3, Aufgabe 2)**

Sei $R$ der Unterring des Matrizenringes $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, der aus den Matrizen $\begin{pmatrix} z & a \\ 0 & z \end{pmatrix}$ mit $z \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Q}$ besteht.

**(a)** Zeigen Sie, dass jedes Primideal von $R$ die Elemente

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{Q}$$

enthält, und dass diese Elemente ein Ideal $N$ von $R$ bilden, für das $R/N \cong \mathbb{Z}$ gilt.

**(b)** Bestimmen Sie alle Primideale von $R$.

## Aufgabe 3 **(Frühjahr 2004, Thema 1, Aufgabe 2)**

Zeigen Sie: Sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist das Polynom $aX^4 + bX^3 + c$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

## Aufgabe 4 **(Frühjahr 2004, Thema 3, Aufgabe 1)**

**(a)** Sei $K = \mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen. Finden Sie ein Polynom $f \in K[x]$, das die Kongruenz

$$(x^4 + x^3 + x^2 + 1) \cdot f \equiv x^2 + 1 \mod (x^3 + 1)$$

in $K[x]$ erfüllt.

**(b)** Sei $K = \mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen. Gibt es dann zu jedem $g \in K[x]$ ein $f \in K[x]$, so dass die Kongruenz

$$(x^2 + 1) \cdot f \equiv g \mod (x^3 + 1) \qquad (*)$$

erfüllt ist?

**(c)** Finden Sie in der Kongruenz $(*)$ für $g = 1$ eine Lösung $f \in \mathbb{F}_3[x]$.