Mathematisches Institut
der Universität München

Wintersemester 2008/2009

Mathematik I für Physiker

Probeklausur 2

Prof. Dr. H.-D. Donder

Aufgabe 1: Stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ (Polarkoordinaten) dar:

$$\text{(a)} \qquad \frac{(\sqrt{3}+i)^3}{2i} \qquad\qquad \text{(b)} \qquad 2i(\sqrt{3}+i)$$

Aufgabe 2: Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \qquad \text{Tipp: } (1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$$

$$\text{(b)} \qquad \sum_{k=0}^{n} kx^k = x\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Aufgabe 3: Berechne folgende Grenzwerte von Folgen und Reihen oder beweise, dass sie nicht existieren:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{n\to\infty} (n+1)\cos\left(\frac{6+9n+4n^2}{2n+2}\pi\right) \qquad\qquad \text{(b)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{5}\right)$$

Aufgabe 4: Bestimme das Taylorpolynom dritten Grades $T_3(f, 0)$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Entwicklungspunkt 0:

$$\text{(a)} \qquad f(x) = e^{x^3} \qquad\qquad \text{(b)} \qquad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Aufgabe 5: Berechne die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \qquad \int_0^{\pi/4} \tan t \,\mathrm{d}t \qquad \text{Tipp: Substituiere } x = \cos(t)$$

$$\text{(b)} \qquad \int_0^{\infty} t^3 e^{-t} \mathrm{d}t$$

Aufgabe 6: Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass dann auch die Funktion

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = f(g(x))$$

eine Regelfunktion ist.