Mathematisches Institut
der Universität München Wintersemester 2008/2009

Mathematik I für Physiker

Musterlösung der Nachholklausur

Aufgabe 1

(a) Wie in der Klausur zeigt man $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Außerdem gilt: $(1+\sqrt{3}i)^3 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \cdot 3 - 3\sqrt{3}i = -8$, also ist

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{2i} = -\frac{4}{i} = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

(b) Wegen $(1+\sqrt{3}i)^3 = -8 = 8 \cdot e^{i\pi}$ muss $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\psi}$ sein, so dass $e^{3i\psi} = e^{i\pi}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist, so dass also $3\psi = \pi + 2k\pi$ ist. Es ist also $\psi \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi\}$, und da der Imaginärteil $\sin\pi$ positiv ist, folgt $\psi = \frac{\pi}{3}$. Folglich:

$$2i(1+\sqrt{3}i) = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

Aufgabe 2

(a) Wegen eines Fehlers in der Angabe – die Summe muss bis $n-1$ laufen – wird diese Teilaufgabe mit vier Punkten gewertet.

Induktionsanfang für $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0-1}(2k+1)^2 = 0 = \frac{4}{3}0^3 - \frac{1}{3}0$

Induktionsschritt für $n+1$: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + (2n+1)^2 = \frac{4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3}{3} = \frac{4(n+1)^3 - (n+1)}{3} = \frac{4}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}(n+1)$

(b) *Induktionsanfang für $n = 0$:* $\sum_{k=0}^{n} k!k = 0!0 = 0 = 0! - 1$

Induktionsschritt für $n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} k!k = \sum_{k=0}^{n} k!k + (n+1)!(n+1) = (n+1)! - 1 + (n+1)!(n+1) = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$

Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned}(n+1)^2\cos\left(\frac{6+9n+4n^2}{2n+2}\pi\right) &= (n+1)^2\cos\left(\frac{6+5n}{2n+2}\pi+2n\pi\right)\\ &= (n+1)^2\cos\left(\frac{1}{2n+2}\pi+\frac{5}{2}\pi+2n\pi\right)\\ &= (n+1)^2\cos\left(\frac{\pi}{2n+2}+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}(n+1)\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n+2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2n+2}}\end{aligned}$$

Der erste Faktor divergiert gegen ∞, der zweiten gegen $\cos'(\frac{\pi}{2})=-1$, also divergiert die Folge gegen ∞.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k+5}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}+5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e^{-1}+5e$, da die Exponentialreihe absolut konvergiert.

Aufgabe 4

(a) Setze zur Abkürzung $g(x)=x^2+x+1$. Dann ist $g''(x)=2$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{g'(x)}{g(x)}\\ f''(x) &= \frac{2g(x)-(g'(x))^2}{(g(x))^2}=\frac{2}{g(x)}-(f'(x))^2\\ f'''(x) &= -\frac{2g'(x)}{(g(x))^2}-2f'(x)f''(x)\end{aligned}$$

Einsetzen der Werte $g(0)=g'(0)=1$ ergibt $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$, sowie $f'''(0)=-4$. Also ist $T_3(f,0)(x)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3$.

(b) Da die Funktion gerade ist, ist ihre dritte Ableitung ungerade, verschwindet also im Nullpunkt. Außerdem ist:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-(1+x^2)\sin(x)-2x\cos x}{(1+x^2)^2}=-\frac{\sin(x)}{1+x^2}-\frac{2x\cos(x)}{(1+x^2)^2}\\ f''(x) &= -\frac{\cos(x)-2x\sin(x)}{(1+x^2)^2}-\frac{(2\cos(x)-2x\sin(x))(1+x^2)-8x^2\cos(x)}{(1+x^2)^3}\\ &= \frac{8x^2\cos(x)}{(1+x^2)^3}-\frac{3\cos(x)-4x\sin(x)}{(1+x^2)^2},\end{aligned}$$

also $T_3(f,0)(x)=1-\frac{3}{2}x^2$.

Aufgabe 5

(a) Wir substituieren $x = \sin(t)$. Dann ist $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos(t)$, also:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t) e^{\sin(t)} \mathrm{d}t = \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e - 1$$

(b) Mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^a t5^{-t}\mathrm{d}t &= \int_0^a te^{-t\ln 5}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{-\ln 5}e^{-t\ln 5}\right]_0^a - \int_0^a \frac{1}{-\ln 5}e^{-t\ln 5}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{a}{\ln 5}5^{-a} - \left[\frac{1}{(\ln 5)^2}e^{-t\ln 5}\right]_0^a \mathrm{d}t = -\frac{a5^{-a}}{\ln 5} - \frac{5^{-a}}{(\ln 5)^2} + \frac{1}{(\ln 5)^2}\end{aligned}$$

Dies konvergiert für $a \to \infty$ gegen $\dfrac{1}{(\ln 5)^2}$.

Aufgabe 6

Angenommen, $(\sin(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 0. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge (b_n) von (a_n), so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\sin(b_n) - 0| \geq \epsilon$$

Da der Sinus in π und 2π stetig und 0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - \pi| < \delta$ oder $|x - 2\pi| < \delta$ gilt: $|\sin x - 0| < \epsilon$. Kein b_n kann also im Intervall $(\pi-\delta, \pi+\delta)$ oder $(2\pi-\delta, 2\pi+\delta)$ liegen, das heißt, die Folge (b_n) liegt in der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R} \setminus ((\pi - \delta, \pi + \delta) \cup (2\pi - \delta, 2\pi + \delta))$. Da (b_n) eine beschränkte Folge ist, hat sie einen Häufungspunkt $c \in \mathbb{R}$ und wegen der Abgeschlossenheit muss auch dieser in $\mathbb{R} \setminus ((\pi - \delta, \pi + \delta) \cup (2\pi - \delta, 2\pi + \delta))$ liegen, ist also insbesondere verschieden von π und 2π. Da (b_n) eine Teilfolge von (a_n) ist, ist c dann auch Häufungspunkt von (a_n), im Widerspruch zur Voraussetzung.