Mathematisches Institut
der Universität München Wintersemester 2008/2009

Mathematik I für Physiker

Musterlösung der Klausur

Aufgabe 1

(a) Wir stellen zunächst (wie in der Probeklausur 2) i in Polarkoordinaten dar: Wegen $|i| = 1$ müssen wir nur ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ finden, so dass $i = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, so dass also $\cos(\varphi) = 0$ und $\sin(\varphi) = 1$ ist. Die einzigen Nullstellen des Cosinus im Intervall $[0, 2\pi)$ sind $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$. Wegen $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$ ist also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und somit $i = e^{i\pi/2}$.

$(2+2i)^2 = 4 + 8i - 4 = 8i = 8e^{i\pi/2}$, also ist $\dfrac{(2+2i)^2}{2i} = 4 = 4e^{0i}$.

(b) Wegen $(2+2i)^2 = 8e^{i\pi/2}$ ist $2+2i = \sqrt{8}e^{i\psi}$, so dass $e^{2i\psi} = (e^{i\psi})^2 = e^{i\pi/2}$. Es ist also $2\psi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und damit ist π entweder $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{5}{4}\pi$. Da $2+2i$ positiven Real- und Imaginärteil hat, ist $\psi = \frac{\pi}{4}$. Wir erhalten:

$$2i(2+2i) = 2e^{i\pi/2} \cdot \sqrt{8}e^{i\pi/4} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Aufgabe 2

(a) *Induktionsanfang für $n = 0$:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} kF_k = 0 = -2 + 2 = 0F_{0+2} - F_{0+3} + 2$

Induktionsschritt von n nach $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} kF_k &= \sum_{k=0}^{n} kF_k + (n+1)F_{n+1} = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 + nF_{n+1} + F_{n+1} \\
&= n(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+3} + F_{n+1} + 2 = (n+1)F_{n+3} - 2F_{n+3} + F_{n+3} - F_{n+2} + 2 \\
&= (n+1)F_{n+3} - F_{n+3} - F_{n+2} + 2 = (n+1)F_{n+3} - F_{n+4} + 2
\end{aligned}$$

(b) *Induktionsanfang für $n = 0$:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} F_{2k+1} = F_1 = 1 = F_{2\cdot 0+2}$

Induktionsschritt von n nach $n+1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} + F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+3} =$ $F_{2n+4} = F_{2(n+1)+2}$

Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1}\cos\left(\frac{6+9n+4n^2}{2n+2}\pi\right) &= \sqrt{n+1}\cos\left(\frac{6+5n}{2n+2}\pi+2n\pi\right)\\
&= \sqrt{n+1}\cos\left(\frac{1}{2n+2}\pi+\frac{5}{2}\pi+2n\pi\right)\\
&= \sqrt{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2n+2}+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n+2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2n+2}}
\end{aligned}$$

Der erste Faktor konvergiert gegen 0, der zweiten gegen $\cos'(\frac{\pi}{2}) = -1$, also konvergiert die Folge gegen 0.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k}\cdot\frac{2}{k}\cdots\frac{k}{k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}$ ist eine Majorante der divergenten harmonischen Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, divergiert also.

Aufgabe 4

(a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5x^4\cos(x^5)\\
f''(x) &= 20x^3\cos(x^5) - 25x^8\sin(x^5)\\
f'''(x) &= 60x^2\cos(x^5) - 100x^7\sin(x^5) - 200x^7\sin(x^5) - 125x^{12}\cos(x^5),
\end{aligned}$$

also ist $T_3(f,0)(x) = 0$, da diese Ableitungen alle in 0 verschwinden.

(b) Da die Funktion gerade ist, ist ihre dritte Ableitung ungerade, verschwindet also im Nullpunkt. Außerdem ist:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2xe^{-x^2}\\
f''(x) &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2},
\end{aligned}$$

also $T_3(f,0)(x) = 1 - x^2$.

Aufgabe 5

(a) Wir substituieren $x = \sqrt{t}$. Dann ist $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x$, also:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi}\sin x\cdot 2x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x = 2\left[-x\cos x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(-\cos x)\mathrm{d}x\\
&= -2\pi(-1) - 2\left[-\sin x\right]_0^{\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

(b) Mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^a e^{-t}\sin(2t)\mathrm{d}t &= \left[-e^{-t}\sin(2t)\right]_0^a - \int_0^a (-e^{-t})\cdot 2\cos(2t)\mathrm{d}t \\
&= -e^{-a}\sin(2a) + 2\int_0^a e^{-t}\cos(2t)\mathrm{d}t \\
&= -e^{-a}\sin(2a) + 2\left[-e^{-t}\cos(2t)\right]_0^a - 2\int_0^a (-e^{-t})(-2\sin(2t))\mathrm{d}t \\
&= -e^{-a}\sin(2a) - 2e^{-a}\cos(2a) + 2 - 4\int_0^a e^{-t}\sin(2t)\mathrm{d}t, \text{ also:} \\
5\int_0^a e^{-t}\sin(2t)\mathrm{d}t &= -e^{-a}\sin(2a) - 2e^{-a}\cos(2a) + 2, \text{ und damit:} \\
\int_0^a e^{-t}\sin(2t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{5}\lim_{a\to\infty}\left(-e^{-a}\sin(2a) - 2e^{-a}\cos(2a) + 2\right) = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Wir zeigen, dass die Menge A jeden ihrer Häufungspunkte enthält. Sei also b ein Häufungspunkt von A. Dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$b = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Wegen $a_n \in A$ gilt nach Definition $f(a_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f stetig ist, ist dann

$$f(b) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

also ist auch $b \in A$.