Mathematisches Institut
der Universität München

Wintersemester 2008/2009

Mathematik I für Physiker

Übungsblatt 9

Prof. Dr. H.-D. Donder

Aufgabe 1: Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x\sqrt[5]{x^2+1}$

(d) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad j(x) = |x| \cdot x$

Aufgabe 2: Zeige, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{, falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in 0 differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

Aufgabe 3: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass Ableitungen gerader Funktionen ungerade und Ableitungen ungerader Funktionen gerade sind.

Aufgabe 4:

(a) Beweise den *verallgemeinerten Mittelwertsatz*: Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige, in (a,b) differenzierbare Funktionen, so gibt es ein $c \in (a,b)$ mit:

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

(b) Zeige damit die *Regel von l'Hôpital*: Seien $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funkionen mit $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, sowie $f(a) = g(a) = 0$. Es existiere der Grenzwert

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = r \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = r$$