

Mathematik I für Physiker

Übungsblatt 7

Prof. Dr. H.-D. Donder

Aufgabe 1: Sei $a > 0$. Berechne die folgenden Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} \\ \text{(b)} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x^2} \right) / \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} \right) \\ \text{(c)} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \\ \text{(d)} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \end{array}$$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Funktionen sind stetig? Welche sind gleichmäßig stetig? (Beachte den Definitionsbereich!)

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x^2 > 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{(b)} & f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x^2 > 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{(c)} & f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - n)(x - n - 1), \text{ falls } x \in [n, n + 1) \text{ für } n \in \mathbb{Z} \\ \text{(d)} & f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{1}{x} - n \right) \left(\frac{1}{x} - n - 1 \right), \text{ falls } \frac{1}{x} \in [n, n + 1) \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{array}$$

Aufgabe 3: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeige, dass für jedes $p \in (a, b)$ die links- und rechtsseitigen Limites

$$\lim_{x \nearrow p} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow p} f(x)$$

existieren.

Aufgabe 4: Für jedes n sei $A_n \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere kompakte Menge. Es gelte für alle n $A_{n+1} \subseteq A_n$. Zeige, dass es einen Punkt gibt, der in allen A_n liegt, dass also gilt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$

Die Schnittmenge $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots$ ist hierbei definiert als die Menge aller Zahlen, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Menge A_n liegen, das heißt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } x \in A_n\}$$