Topologie II, SS 2003
D. Kotschick

8. April

(1) **Differenzierbare Mannigfaltigkeiten** sind topologische Räume die Hausdorffsch sind, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, und die eine durch einen Atlas gegebene lokal Euklidische Struktur haben, so dass die Kartenwechsel Diffeomorphismen sind.
(2) Funktionen auf und Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten sind differenzierbar, wenn sie es in Karten sind.
(3) Unter Differenzierbarkeit verstehen wir immer, dass Abbildungen C^k sind, mit $k \geq 1$. Der Einfachheit halber nehmen wir in der Regel an, dass Kartenwechsel, Abbildungen und Funktionen C^∞ sind. Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil jede C^k Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$ eine eindeutige zugrunde liegende C^∞ Struktur hat. (Siehe [5].)
(4) Ein Hauptproblem der Differentialtopologie ist die Klassifikation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Vgl. Milnors Konstruktion exotischer differenzierbarer Strukturen auf S^7, und die Poincaré-Vermutung.

10. April

(5) **Tangentialvektoren**, **Tangentialbündel**, und das **Differential** von differenzierbaren Abbildungen.
(6) **Immersionen**, **Submersionen**, **Einbettungen**.

15. April

(7) **Untermannigfaltigkeiten**.
(8) **Reguläre** und **kritische Werte** von differenzierbaren Abbildungen. Urbilder von regulären Werten sind nach dem Satz über implizite Funktionen differenzierbare Untermannigfaltigkeiten.
(9) Ohne Beweis geben wir die beiden folgenden Ergebnisse aus der Analysis an, die u. a. zeigen, dass man immer reguläre Werte finden kann.

Lemma 1 (Mini-Sard). *Sind M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit $dim(M) < dim(N)$, und $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, so ist $N \setminus f(M)$ dicht in N.*

Satz 2 (Satz von Sard). *Sind M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, so ist die Menge der kritischen Werte eine Menge vom Mass Null in N. Insbesondere sind die regulären Werte von f dicht in N.*

Die einfachere Aussage ("Mini-Sard") werden wir später beweisen, siehe (13). Für einen Beweis des Satzes von Sard siehe zum Beispiel [5, 6].

(10) Wir beweisen:

Satz 3. *Jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit kann differenzierbar in einen $\mathbb{R}^p$ eingebettet werden.*

Dies folgt aus Kompaktheit, Hausdorff-Eigenschaft, lokaler Euklidizität und der Existenz von glatten Glockenfunktionen.

24. April

(11) Wir beweisen, unter Benutzung des Mini-Sard Lemmas:

Satz 4 (Einbettungs-Satz von Whitney). *Jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n kann differenzierbar in $\mathbb{R}^{2n+1}$ eingebettet werden.*

Zum Beweis beginnen wir mit Satz 3, und projezieren induktiv auf geeignete Hyperebenen im $\mathbb{R}^p$. Welche Hyperebenen geeignet sind ergibt sich aus den Bedingungen Immersion und injektiv zu sein. Die Existenz von Projektionen die diese Bedingungen erfüllen folgt aus dem Mini-Sard Lemma.

(12) Das obige Argument liefert auch den folgenden Approximations-Satz:

Satz 5. *Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n, und $f\colon M \to \mathbb{R}^p$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $p \geq 2n+1$, so kann f für jedes $\epsilon > 0$ durch Einbettungen ϵ-genau approximiert werden.*

Dieser Satz ist scharf, da zum Beispiel eine Immersion als "Acht" von S^1 in $\mathbb{R}^2$ nicht durch Einbettungen approximiert werden kann. Andererseits ist Satz 4 nicht scharf, dort kann, mit einem aufwendigeren Beweis, $2n+1$ durch $2n$ ersetzt werden.

29. April

(13) Beweis des Mini-Sard Lemmas, Lemma 1.

(14) **Mannigfaltigkeiten mit Rand**.

6. Mai

(15) Beweis, dass eine kompakte Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand nicht differenzierbar auf ihren Rand retrahiert werden kann.
(16) Anwendung auf den **Brouwerschen Fixpunktsatz**: Jede stetige Selbstabbildung eines abgeschlossenen Balls hat einen Fixpunkt. Der Fall von differenzierbaren Abbildungen folgt aus der vorherigen Aussage, der allgemeine Fall aus dem differenzierbaren durch polynomiale Approximation.
(17) Vergleich mit dem homologischen Beweis; Abbildungsgrad.

8. Mai

(18) **Transversalität** von differenzierbaren Abbildungen.
(19) Ist $L \subset N$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, und $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung die transversal zu L ist, so ist $f^{-1}(L)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M, deren Kodimension (in M) gleich der von L (in N) ist.
(20) **Stabilität** von Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen unter kleinen Homotopien. Submersion zu sein, oder transversal zu einer festen Untermannigfaltigkeit $L \subset N$ zu sein sind stabile Eigenschaften von Abbildungen die auf kompakten Mannigfaltigkeiten definiert sind.
(21) Wir beweisen:

Satz 6. *Seien M, N und T differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $L \subset N$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Ist*

$$F\colon M \times T \to N$$

transversal zu L, so ist $f_t\colon M \to N$ definiert durch $f_t(x) = F(x,t)$ transversal zu L für alle $t \in T \setminus C$, wobei C Mass Null in T hat. (Insbesondere ist $T \setminus C$ dicht in T.)

13. Mai

(22) Satz 6 kann zum Beispiel in Zusammenhang mit der folgenden Aussage eingesetzt werden:

Satz 7. *Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Es gibt einen offenen Ball T um $0 \in \mathbb{R}^p$ und eine differenzierbare*

Abbildung $F\colon M \times T \to N$ *mit* $f(x) = F(x,0)$ *für die die Abbildung*

$$\begin{aligned} g_x\colon T &\longrightarrow N \\ t &\longmapsto F(x,t) \end{aligned}$$

für jedes $x \in M$ *eine Submersion ist. Insbesondere ist* F *eine Submersion.*

In dieser Situation ist F transversal zu jeder Untermannigfaltigkeit $L \subset N$. Wendet man Satz 6 auf dieses F an, so erhählt man:

Korollar 8. *Sei* $f\colon M \to N$ *eine differenzierbare Abbildung, und* $L \subset N$ *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist* f *differenzierbar homotop zu einer Abbildung die transversal zu* L *ist.*

(23) Für den Beweis von Satz 7 beweisen wir:

Satz 9 (Existenz von ϵ-Umgebungen)**.** *Sei* $N \subset \mathbb{R}^p$ *eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Es gibt eine positive differenzierbare Funktion* $\epsilon\colon N \to \mathbb{R}$ *für die*

$$U_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \exists y \in N \text{ s. d. } ||x-y|| < \epsilon(y)\}$$

eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^p$ *ist, mit einer Submersion* $\pi\colon U_\epsilon \to N$ *so dass* $\pi|_N = Id_N$.

15. Mai

(24) Ein **differenzierbares Faserbündel** mit Totalraum E, Basis B und Faser F ist eine Submersion $\pi\colon E \to B$ so dass B durch offene Mengen U_i überdeckt werden kann, für die es Diffeomorphismen $\phi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ gibt mit $\pi_1 \circ \phi_i = \pi|_{\pi^{-1}(U_i)}$. Die Abbildungen ϕ_i heissen lokale Trivialisierungen des Faserbündels. Sie haben die Eigenschaft, dass

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(p,f) \;=\; (p, (g_{ij}(p))(f))$$

falls $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, wobei $g_{ij}(p)$ ein Diffeomorphismus von F ist der differenzierbar von p abhängt.

(25) Beispiele: das triviale Bündel, das Tangentialbündel, das Normalenbündel einer Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^p$, das Möbiusband als Faserbündel über S^1, die Hopf Faserung $S^3 \to S^2$.

(26) **Lie Gruppen** und differenzierbare Operationen von Lie Gruppen auf Mannigfaltigkeiten. Beispiele.

(27) Ein differenzierbares Faserbündel hat **Strukturgruppe** G, wenn es eine Operation von G auf F gibt, und ein System von lokalen Trivialisierungen des Bündels, so dass für alle i und j aus diesem System die entsprechenden $g_{ij}(p)$ Werte nur in der Untergruppe von $Diff(F)$ annehmen, die durch die Operation von G auf F gegeben ist. Dabei braucht der Homomorphismus $G \to Diff(F)$ nicht injektiv zu sein.
(28) Der Spezialfall von **Vektorraumbündeln**, und von **Prinzipalbündeln**.
(29) Diskussion der Strukturgruppen in den Beispielen aus (25).
(30) Definition von **Schnitten** in Faserbündeln als differenzierbare Abbildungen $s\colon B \to E$ mit der Eigenschaft dass $\pi \circ s = Id_B$. Jedes Vektorraumbündel hat Schnitte, und sie bilden einen unendlich-dimensionalen Vektorraum.

20. Mai

(31) Trivialisierungen von Faserbündeln und von Vektorraumbündeln. Ein Vektorraumbündel vom Rang k ist global trivial genau dann wenn es k Schnitte hat deren Werte in jedem Punkt linear unabhängig sind.
(32) Bündelabbildungen und das Zurückziehen von Bündeln unter differenzierbaren Abbildungen. Homotopie-Invarianz des zurückgezogenen Bündels. Einschränkung von Bündeln auf Untermannigfaltigkeiten.
(33) Untervektorraumbündel. Ist $f\colon E \to F$ eine Bündelabbildung von konstantem Rang über der Identität, so sind $Kern(f)$ und $Bild(f)$ Untervektorraumbündel von E bzw. von F.

22. Mai

(34) **Whitney-Summe** von Vektorraumbündeln, Skalarprodukte und orthogonale Komplemente. Jedes Komplement eines Untervektorraumbündels $E \subset F$ ist isomorph zum **Quotientenbündel** F/E.
(35) Ist $M \subset N$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, so ist ihr **Normalenbündel** $\nu(M) = (TN|_M)/TM$ definiert.

Satz 10. *Ist eine differenzierbare Abbildung $f\colon X \to Y$ transversal zu einer Untermannigfaltigkeit $Z \subset Y$, so ist $f^{-1}(Z) \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit mit Normalenbündel $\nu(f^{-1}(Z)) = f^*\nu(Z)$.*

Es folgt insbesondere, dass Urbilder regulärer Werte triviales Normalenbündel haben.

27. Mai

(36) **Kobordismus** von Mannigfaltigkeiten und von Untermannigfaltigkeiten, **gerahmter Kobordismus von Untermannigfaltigkeiten**. Dies sind Äquivalenzrelationen.

(37) Die folgende Diskussion gerahmter Kobordismen basiert auf [6].

Wir betrachten differenzierbare Abbildungen $f\colon N \to S^p$. Wähle einen regulären Wert $x \in S^p$ von f, und eine orientierte Basis $v_1, \dots, v_p$ von $T_x S^p$. Die Basis gibt eine Rahmung, oder Trivialisierung des Normalenbündels von $M = f^{-1}(x)$ in N. Die Untermannigfaltigkeit $M \subset N$ zusammen mit dieser Rahmung heisst die **Pontryagin-Mannigfaltigkeit** von f bezüglich x und $v_1, \dots, v_p$.

Satz 11. *Die gerahmte Kobordismus-Klasse der Pontryagin Mannigfaltigkeit hängt nur von f ab, und nicht von x und $v_1, \dots, v_p$.*

(38) Im Laufe des Beweises von Satz 11 beweisen wir zunächst die Unabhängigkeit der gerahmten Kobordismus-Klasse von der Wahl der orientierten Basis. Danach können wir von der gerahmten Kobordismus-Klasse des Urbildes eines regulären Wertes sprechen, ohne die Basis die die Rahmung angibt zu spezifizieren. Dann beweisen wir:

Lemma 12. *Sind f und g (differenzierbar) homotope Abbildungen $N \to S^p$ und $y \in S^p$ ein gemeinsamer regulärer Wert, dann sind $f^{-1}(y)$ und $g^{-1}(y)$ gerahmt kobordant.*

3. Juni

(39) Die Abbildung die einer differenzierbaren Abbildung $f\colon N \to S^p$ ihre Pontryagin Mannigfaltigkeit zuordnet ist surjektiv:

Satz 13. *Sei $M \subset N$ eine gerahmte Untermannigfaltigkeit der Kodimension p. Es gibt eine differenzierbaren Abbildung $f\colon N \to S^p$ die M als Pontryagin Mannigfaltigkeit hat.*

(40) Der Hauptsatz über die Korrespondenz zwischen Homotopie-Klassen von Abbildungen und gerahmten Kobordismus-Klassen von Untermannigfaltigkeiten lautet:

Satz 14. *Sei N eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zwei differenzierbare Abbildungen $N \to S^p$ sind homotop* *genau dann wenn ihre Pontryagin Mannigfaltigkeiten gerahmt kobordant sind.*

Beweis. Sind die Abbildungen homotop, so folgt aus Lemma 12 dass ihre Pontryagin Mannigfaltigkeiten gerahmt kobordant sind. Umgekehrt, ist ein gerahmter Kobordismus zwischen den Pontryagin Mannigfaltigkeiten gegeben, so konstruieren wir eine Homotopie analog zu der Konstruktion im Beweis von Satz 13. □

Insgesamt haben wir also eine Bijektion zwischen der Menge der Homotopie-Klassen $[N, S^p]$ von Abbildungen und den gerahmten Kobordismus-Klassen von Untermannigfaltigkeiten $M \subset N$ der Kodimension p.

5. Juni

(41) Wir wenden die Bijektion zwischen Homotopie-Klassen $[N, S^p]$ und gerahmten Kobordismus-Klassen von Untermannigfaltigkeiten $M \subset N$ der Kodimension p in den einfachsten Spezialfällen an. Ist $dim(N) < p$, so ist jede Abbildung $N \to S^p$ homotop zur konstanten, entsprechend sind die Pontryagin Mannigfaltigkeiten leer.

(42) Ist $dim(N) = p$ und N orientiert, so ist die gerahmte Kobordismus-Klasse einer 0-dimensionalen Untermannigfaltigkeit gerade durch das Aufaddieren der Vorzeichen die das Orientierungs-Verhalten beschreiben gegeben–also durch den Abbildungsgrad. Wir erhalten aus Satz 14:

Satz 15 (Hopf). *Ist $dim(N) = p$ und N orientiert und geschlossen, so sind Abbildungen $N \to S^p$ genau dann homotop, wenn sie denselben Abbildungsgrad haben.*

Ist N nicht orientierbar, so gilt der Satz von Hopf entsprechend für den Abbildungsgrad mit Werten in $\mathbb{Z}_2$.

(43) Ist $N = S^n$, und $n > p$, so kann jede gerahmte Kobordismusklasse von $(n-p)$-dimensionalen gerahmten Untermannigfaltigkeiten in S^n durch eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit repräsentiert werden.

(44) Im Fall $N = S^{p+1}$ betrachten wir $S^1 \subset S^{p+1}$ als gerahmte Untermannigfaltigkeit. Je zwei Rahmungen unterscheiden sich um ein Element von $\pi_1(GL(p, \mathbb{R}))$. Für $p \geq 3$ ist dies die Gruppe mit zwei Elementen. Es folgt, dass $[S^{p+1}, S^p]$ genau zwei Elemente hat.

12. Juni

(45) **Homotopiegruppen**; einfachste Eigenschaften, Beispiele.

17. Juni

(46) Relative Homotopiegruppen.
(47) Die **exakte Homotopiesequenz** von Raumpaaren.

24. Juni

(48) Die exakte Homotopiesequenz von Faserungen; Anwendungen auf Überlagerungen.

26. Juni

(49) (Un)Abhängigkeit der Fundamentalgruppe vom Basispunkt.
(50) Die Operation der Fundamentalgruppe auf sich selbst; Bijektion zwischen den Konjugationsklassen in $\pi_1(X, x_0)$ und den freien Homotopieklassen $[S^1, X]$.
(51) (Un)Abhängigkeit der höheren Homotopiegruppen vom Basispunkt.

1. Juli

(52) Die Operation der Fundamentalgruppe auf den höheren Homotopiegruppen; Zusammenhang mit den freien Homotopieklassen $[S^n, X]$.
(53) Eine differenzierbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ heisst **Morse Funktion**, wenn ihr Differential als Abbildung $df\colon M \to T^*M$ transversal zum Nullschnitt $M \subset T^*M$ ist. Es ist klar, dass das Bild von df den Nullschnitt genau in den kritischen Punkten von f trifft. Die Transversalitäts-Bedingung impliziert, dass die kritischen Punkte eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M sind, insbesondere sind sie isoliert. Ist M kompakt, so hat eine Morse Funktion nur endlich viele kritische Punkte.
(54) Die Transversalitäts-Bedingung in der Definition von Morse Funktionen ist äquivalent dazu, dass in jedem kritischen Punkt p von f bezüglich einer beliebigen Karte die **Hesse-Matrix** $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(p)$ nicht ausgeartet ist. (Da Transversalität nicht von der Karte abhängt, hängt auch das Nicht-ausgeartet-Sein der Hesse-Matrix nicht von der Karte ab.)

(55) Das **Morse Lemma** besagt, dass man in jedem kritischen Punkt p einer Morse Funktion eine Karte finden kann, in der f die Gestalt

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

hat. (Der Punkt p entspricht dem Nullpunkt in der Karte.) Die Anzahl k ist dann die Anzahl negativer Eigenwerte der Hesse-Matrix, und hängt ebenfalls nicht von der Karte ab. Man nennt k den **Morse Index** des kritischen Punktes p.

(56) Wir beweisen nun den fundamentalen Satz:

Satz 16. *Ist M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion, so gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Morse Funktionen $g\colon M \to \mathbb{R}$ mit $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in M$.*

Beweis. Wir führen die Aussage auf schon bewiesene Transversalitäts-Sätze zurück. Das einzige Problem im Beweis besteht darin, dass die zu erfüllende Transversalitätbedingung nicht eine Bedingung an f sondern an df ist. Stören wir also df um es transversal zum Nullschnitt zu machen, so ist sicherzustellen, dass die Störung von df tatsächlich von einer geeigneten Störung von f induziert wird.

Nach Satz 3 dürfen wir annehmen, dass $M \subset \mathbb{R}^p$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon M \times (\mathbb{R}^p)^* &\longrightarrow T^*M \\ (x, \Lambda) &\longmapsto d_x(f - \Lambda|_M) = d_x f - \Lambda|_{T_xM} \ . \end{aligned}$$

Es gilt

$$(D_{(x,\Lambda)}F)(0, \lambda) = -\lambda|_{T_xM} \in T_x^*M = T_0(T_x^*M) \subset T_{(x,0)}(T^*M) \ ,$$

und jede Linearform auf T_xM wird von einer Linearform $\lambda \in (\mathbb{R}^p)^*$ induziert. Also ist die Projektion von $Bild(DF)$ auf einen Komplementärraum des Tangentialraums des Nullschnittes surjektiv, und F transversal zum Nullschnitt. Nach Satz 6 folgt, dass für eine dichte Teilmenge von festen $\Lambda \in (\mathbb{R}^p)^*$ die Abbildung $df - \Lambda|_{TM}$ transversal zum Nullschnitt ist. Ist Λ nahe genug bei $0 \in (\mathbb{R}^p)^*$, so können wir $g = f - \Lambda|_M$ nehmen. $\square$

3. Juli

(57) Wir untersuchen nun die Topologie von kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten indem wir die Subniveaumengen von Morse-Funktionen betrachten. Sei also $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion auf einer kompakten Mannigfaltigkeit, und $M_t = f^{-1}((-\infty, t])$. Ist t ein regulärer Wert von f, so ist M_t entweder leer (falls $t < min(f)$), oder eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand $f^{-1}(t)$. Die erste wichtige Aussage ist, dass M_{t_1} und M_{t_2} zueinander diffeomorph sind, wenn das Intervall $[t_1, t_2]$ nur aus regulären Werten von f besteht. (Der Diffeomorphismus wird durch den Fluss des Gradienten-Vektorfeldes von f bezüglich einer beliebigen Riemannschen Metrik erzeugt.)

(58) Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit hat eine Morse Funktion mindestens zwei kritische Punkte: ein Minimum und ein Maximum. Falls es keine anderen kritischen Punkte gibt, so kann man die Mannigfaltigkeit bis auf Homöomorphie indentifizieren:

Satz 17. *Ist M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit die eine Morse Funktion mit genau zwei kritischen Punkten zulässt, so ist M homöomorph zu einer Sphäre.*

Beweis. Nach dem Morse Lemma gibt es Umgebungen der beiden kritischen Punkte in denen die Urbilder regulärer Werte konzentrische Sphären S^{n-1} sind. Obiges Argument zeigt, dass M diffeomorph zu $\overline{B^n} \bigcup_\psi \overline{B^n}$ ist, für einen Diffeomorphismus $\psi\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$. Da jeder solche Diffeomorphismus sich durch die Kegel-Konstruktion als Homöomorphismus auf $\overline{B^n}$ fortsetzen lässt, ist M homöomorph zu S^n. □

(59) Ist n klein, so lässt sich ψ sogar als Diffeomorphismus auf den Ball fortsetzen, und man schliesst dass M diffeomorph zu S^n ist. Ist aber $n \geq 7$, so gibt es Diffeomorphismen von S^{n-1} die sich nicht als Diffeomorphismen auf den Ball ausdehnen lassen, und für die $\overline{B^n} \bigcup_\psi \overline{B^n}$ eine sogenannte **exotische Sphäre** ist, d. h. M ist homöomorph aber nicht diffeomorph zu S^n.

(60) Ist M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit die eine differenzierbare Funktion f mit genau zwei kritischen Punkten zulässt, die aber ausgeartet sein dürfen, d. h. f ist nicht notwendig eine Morse-Funktion, so kann man auf andere Art immer noch schliessen, dass M homöomorph zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ ist. Also ist M homöomorph zu S^n, obwohl man in diesem Fall M nicht in der Form $\overline{B^n} \bigcup_\psi \overline{B^n}$ darstellen kann. Der Grund dafür ist, dass die Niveaumengen von

f in der Nähe eines ausgearteten Minimums oder Maximums keine Sphären zu sein brauchen.

(61) Wir wollen die Argumente der Morse Theorie nun auf **Flächen** anwenden, und so die Klassifikation der zusammenhängenden kompakten differenzierbaren 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ohne Rand herleiten. Dabei folgen wir [7], Kapitel 7.

Jede solche Fläche hat eine Morse Funktion f, und diese hat endlich viele kritische Punkte. Diese sind von drei Typen: lokale Minima (=Morse Index 0), Sattelpunkte (=Morse Index 1) und lokale Maxima (=Morse Index 2). Die Sattelpunkte sind von zwei Arten, trennend oder verbindend. (Diese Worte beschreiben die Auswirkungen auf Subniveaumengen bei Änderung des Funktionswertes, und können ohne Bilder nur mühsam beschrieben werden...)

Da unsere Fläche zusammenhängend ist, muss es genügend viele verbindende Sattelpunkte geben, um alle lokalen Minima letztendlich miteinander zu verbinden. Wir ändern eine gegebene Morse-Funktion f so ab, dass die lokalen Minima kleinere Funktionswerte als alle anderen kritischen Punkte haben. Danach ändern wir die Funktion weiter ab, um zu erreichen, dass nach den lokalen Minima so viele verbindende Sattelpunkte kommen, dass wir schliesslich eine zusammenhängende Subniveaumenge M_t haben, wenn t ein regulärer Wert oberhalb der Werte dieser Minima und Sattelpunkte ist, aber t noch unterhalb der weiteren kritischen Werte von f liegt.

Symmetrisch dazu können wir auch erreichen, dass die Funktionswerte der lokalen Maxima grösser sind als alle anderen kritischen Werte, und dass unterhalb der lokalen Maxima zunächst Sattelpunkte liegen die die verschiedenen Bälle um die lokalen Maxima miteinander vorbinden. Diese Sattelpunkte sind "trennend" im Sinne obiger Definition.

8. Juli

(62) Wir fahren fort mit der Änderung einer gegebenen Morse-Funktion auf einer Fläche, und beweisen, dass die übrigen Sattelpunkte so geordnet werden können, dass wir M aus zwei Exemplaren von $S^2 \setminus (\bigcup_{i=1}^k B_i^2)$ durch Verklebung der Ränder rekonstruieren, wobei k von der Anzahl kritischer Punkte abhängt. Die Komponenten der Ränder sind Exemplare von S^1, und jeder Orientierungs-erhaltende Diffeomorphismus von S^1 ist differenzierbar homotop zur Identität durch Diffeomorphismen. Damit

ist die Verklebung eindeutig, und unsere Fläche M diffeomorph zu einem Standard-Modell $M(k)$. Offensichtlich ist $M(1) = S^2$ und $M(2) = T^2$.

Solche Modelle existieren für jedes $k \geq 1$, und sind für verschiedene k nicht zueinander homöomorph, wie man zum Beispiel durch Berechnung der ersten Homologie durch die Mayer–Vietoris Sequenz einsieht, die $H_1(M(k);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2k-2}$ ergibt.

(63) Die obige Klassifikation der kompakten orientierten zusammenhängenden Flächen ohne Rand kann wie folgt umformuliert werden. Wir definieren das **Geschlecht** von M als die maximale Anzahl von eingebetteten Kreisen in M, deren Komplement zusammenhängend ist. Nach dem Jordanschen Kurvensatz[1] zerlegt jede eingebettete S^1 in S^2 die 2-Sphäre in zwei Komponenten. Damit beweisen wir, dass $M(k)$ Geschlecht $k-1$ hat. Also:

Satz 18. *Zwei kompakte orientierte zusammenhängende Flächen ohne Rand sind diffeomorph genau dann, wenn sie dasselbe Geschlecht haben. Die möglichen Werte des Geschlechts sind* $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

(64) Wir setzen die Klassifikation der Flächen nun ein, um mit der Pontryagin–Thom Konstruktion die Homotopie-Gruppe $\pi_{n+2}(S^n)$ für $n \geq 4$ auszurechnen. Dabei folgen wir [2] Abschnitt 23.4.

Nach 52. wissen wir, dass $\pi_{n+2}(S^n)$ bijektiv zur Menge der freien Homotopie-Klassen $[S^{n+2}, S^n]$ ist. Nach Satz 14 ist $[S^{n+2}, S^n]$ bijektiv zur Menge der gerahmten 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten $\Sigma^2 \subset S^{n+2}$ bis auf gerahmten Kobordismus. Es gilt also, die Kobordismusklassen solcher gerahmten Untermannigfaltigkeiten zu bestimmen. Nach 43. gibt es in jeder Äquivalenzklasse einen zusammenhängenden Repräsentanten Σ, und Σ ist nach Satz 18 durch sein Geschlecht bestimmt.

(65) Sei also $\Sigma \subset S^{n+2}$ eine zusammenhängende gerahmte Fläche. Da $n \geq 4$, ist jede Einbettung äquivalent zu einer Standard-Einbettung

$$\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{n+2} \subset S^{n+2} .$$

Ist $C \subset \Sigma$ ein eingebetteter orientierter Kreis, so sei V ein Normalenvektorfeld zu C in Σ mit der Eigenschaft, dass die Orientierung von C gefolgt von V die gegebene Orientierung von Σ definiert. Dann gibt V, zusammen mit der schon vorhandenen Rahmung von Σ, eine Rahmung von C in S^{n+2}. Nach

[1] aus Topologie I bekannt

44. repräsentiert C mit dieser Rahmung ein eindeutig bestimmtes Element von $\pi_{n+2}(S^{n+1}) = \mathbb{Z}_2$.

Definition 19. Die **Arf Invariante** $q(C)$ ist 0 oder 1, je nachdem ob C mit der obigen Rahmung das triviale oder das nichttriviale Element von $\pi_{n+2}(S^{n+1}) = \mathbb{Z}_2$ repräsentiert.

10. Juli

(66) Die oben definierte Arf Invariante ist invariant unter Homotopien, und ist auf den Elementen von $\pi_1(\Sigma)$ definiert, die durch eingebettete Kreise repräsentiert werden können. Sie hängt von der Rahmung von Σ in S^{n+2} ab.

(67) Ist nun das Geschlecht von Σ mindestens 2, so können wir immer eine Kurve $C \subset \Sigma$ mit $q(C) = 0$ finden. Da C eine Kreisscheibe B^2 in S^{n+2} berandet, die Σ nur in C trifft, und dort transversal, können wir Σ entlang C zerschneiden, und zwei Exemplare von B^2 (leicht verschoben) einsetzen. Dies ergibt eine neue Fläche deren Geschlecht eins weniger ist als das Geschlecht von Σ. Aus $q(C) = 0$ folgt, dass wir diese neue Fläche so rahmen können, dass sie gerahmt kobordant zu Σ ist.

Wir schliessen also, dass es in jeder Kobordismus-Klasse einen Repräsentanten Σ gibt, der S^2 oder T^2 ist. Da $\pi_2(GL(n,\mathbb{R}))$ trivial ist, kann S^2 nur auf eine Art gerahmt werden. Der Torus T^2 kann auf genau zwei Arten gerahmt werden, und eine davon, die "triviale" Rahmung in der es Kurven $C \subset T^2$ mit $q(C) = 0$ gibt, stellt dieselbe Kobordismus-Klasse wie S^2 dar. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 20. *Für $n \geq 4$ gilt $\pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2$.*

Die Aussage glt auch für $n = 2$ oder 3, dies folgt aber nicht aus obigem Beweis.

Literatur

1. T. Bröcker, T. Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Heidelberger Taschenbücher **143**, Springer Verlag 1973.
2. B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry–Methods and Applications, Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*, Graduate Text in Mathematics **104**, Springer Verlag 1985.
3. M. F. Freedman, F. Luo, *Selected Applications of Geometry to Low-Dimensional Topology*, University Lecture Series, vol. **1**, American Mathematical Society 1989.
4. V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall 1974.
5. M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate Text in Mathematics **33**, Springer Verlag 1976.
6. J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia 1965, reprinted by Princeton University Press.
7. A. H. Wallace, *Differential Topology*, W. A. Benjamin 1968.