Einführung in die Topologie, SS 2005
D. Kotschick

11. April

(1) Die Topologie ist eine Sprache, die sich u. a. mit der Formalisierung gewisser fundamentaler geometrischer Ideen beschäftigt. Da ist zunächst der Begriff des Raumes, und dann Begriffe von Nähe, Konvergenz, Stetigkeit, Deformation, u. s. w. Die Sprache der Topologie ist in vielen anderen Gebieten der Mathematik anwendbar, aber die Topologie wirft auch eigene interessante Fragen auf, die natürlich einen geometrischen Charakter haben.

Definition 1. Ein **topologischer Raum** $(X, \mathcal{O})$ besteht aus einer Menge X, zusammen mit einer ausgezeichneten Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, mit folgenden Eigenschaften:
(a) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
(b) sind $U, V \in \mathcal{O}$, so ist auch $U \cap V \in \mathcal{O}$, und
(c) sind $U_i \in \mathcal{O}$ für i aus einer beliebigen Indexmenge I, so ist auch

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O} \ .$$

Man sagt auch, dass eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen mit diesen Eigenschaften eine Topologie auf X definiert. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heissen **offene Mengen** (bezüglich dieser Topologie). Eine Teilmenge $A \subset X$ heisst **abgeschlossen** falls $X \setminus A \in \mathcal{O}$, d. h. abgeschlossene Mengen sind genau die Komplemente der offenen Mengen. Man kann topologische Räume auch durch die dualen Eigenschaften der abgeschlossenen Teilmengen definieren.

(2) Die einfachsten Bespiele von topologischen Räumen oder Topologien sind die diskrete Topologie auf einer beliebigen Menge X (hier sind alle Teilmengen offen), die triviale oder indiskrete Topologie auf einer beliebigen Menge X (hier sind nur X und die leere Menge offen), oder die von der Metrik induzierte Topologie eines metrischen Raumes. Wir wollen einige Dinge über metrische Räume diskutieren, weil sie einerseits die abstrakte Diskussion von topologischen Räumen mit einer intuitiven Basis versehen, und andererseits auch zeigen, dass nicht alle Betrachtungen an die man bei metrischen Räumen gwöhnt ist, sich auf den allgemeinen Fall von topologischen Räumen übertragen lassen.

(3) Wir erinnern an die Definition von metrischen Räumen:

Definition 2. Ein **metrischer Raum** (X, d) besteht aus einer Menge X, zusammen mit einer Abbildung $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:
(a) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$, mit Gleichheit genau dann wenn $x = y$,
(b) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$, und
(c) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Die letzte Eigenschaft ist die Dreiecks-Ungleichung.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so definiert man den (offenen) Ball um einen Punkt $x \in X$ mit Radius $\epsilon > 0$ durch

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \ .$$

Die Topologie eines metrischen Raumes ist definiert dadurch dass eine Teilmenge $U \subset X$ offen ist, wenn sie entweder leer ist, oder mit jedem Punkt $x \in U$ auch einen Ball $B_\epsilon(x)$ um x für eine geeignetes $\epsilon > 0$ enthält. Damit sind offene Bälle, also solche die durch die strikte Ungleichung $d(x, y) < \epsilon$ definiert sind, offen im Sinne der Topologie.

Die Topologie eines metrischen Raumes ist also durch die Metrik bestimmt, aber natürlich nicht umgekehrt. Beim Übergang von einem metrischen Raum zum zugrunde liegenden topologischen Raum verliert man also Information. Dies sieht man zum Beispiel, wenn man sich überlegt, dass auf (X, d) durch

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine Metrik definiert ist, die dieselbe Topologie induziert wie d, obwohl in d' alle Abstände < 1 sind. Insbesondere ist Beschränktheit kein topologischer Begriff.

(4) Für Abbildungen zwischen metrischen Räumen hat man einen wohl-bekannten Stetigkeits-Begriff:

Definition 3. Eine Abbildung $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d)$ zwischen metrischen Räumen heisst **stetig**, wenn gilt: für alle $x \in X$ und alle $\epsilon > 0$ existiert ein δ so dass $d(f(x), f(p)) < \epsilon$ für alle p mit $d(x, p) < \delta$.

(Hier erlauben wir uns den üblichen Missbrauch, die Distanz-Funktion in verschiedenen metrischen Räumen mit demselben Buchstaben zu bezeichnen.) Es gilt der folgende Satz:

Satz 4. *Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann wenn alle Urbilder offener Mengen offen sind.*

Dies gibt eine Formulierung der Stetigkeit, in der die Metrik nicht mehr vorkommt, und die sich direkt auf topologische Räume übertragen lässt:

Definition 5. Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}')$ zwischen topologischen Räumen heisst **stetig** wenn $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ für alle $U \in \mathcal{O}'$.

In der Topologie betrachtet man stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Eine stetige Abbildung heisst **Homöomorphismus**, wenn sie bijektiv ist, und die Umkehrung ebenfalls stetig ist. Homöomorphe topologische Räume sind als gleich anzusehen. Homöomorphismen zwischen metrischen Räumen sind i. A. nicht Isometrien.

(5) Ein Begriff der sich nicht so einfach von metrischen auf topologische Räume übertragen lässt ist der der Vollständigkeit.

Definition 6. Eine Folge $\{x_i\}$ in einem metrischen Raum (X, d) heisst **Cauchy Folge** wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt so dass $d(x_i, x_j) < \epsilon$ für alle $i, j \geq N$. Ein metrischer Raum heisst **vollständig** wenn jede Cauchy Folge $\{x_i\}$ in X einen Limes hat, also einen Punkt $x \in X$ so dass

$$\lim_{i \to \infty} d(x_i, x) = 0 \ .$$

Die Vollständigkeit spielt zum Beispiel in dem berühmten Banachschen Fixpunktsatz eine entscheidende Rolle. Dieser bezieht sich auf kontrahierende Abbildungen:

Definition 7. Eine Abbildung $f : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ heisst **kontrahierend**, wenn es ein $c < 1$ gibt so dass $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Satz 8 (Banachscher Fixpunkt-Satz)**.** *Eine kontrahierende Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes hat genau einen Fixpunkt, d. h. es gibt genau einen Punkt $x \in X$ mit $f(x) = x$.*

(6) Wir können nun versuchen, einige Grundprobleme der Topologie zu formulieren. Es geht z. B. darum zu entscheiden, welche topologischen Räume zueinander homöomorph sind, und welche nicht. Dabei betrachtet man oft nicht beliebige topologische Räume, sondern solche mit einer Zusatzstruktur, die mit der Topologie auf geeignete Weise verträglich ist,

also topologische Gruppen und topologische Vektorräume, CW-Komplexe, topologische bzw. differenzierbare Mannigfaltigkeiten, algebraische Varietäten, u. s. w. Oft hat man dann einen präziseren Isomorphie-Begriff als den des Homöomorphismus, und es ist durchaus möglich, dass zwei Räume homöomorph sind, und dass kein Homöomorphismus zwischen ihnen die Zusatz-Struktur erhält. Ein anderes typisch topologisches Problem ist das Auffinden von Fixpunkten stetiger Abbildungen. Selbst bei metrischen Räumen ist dies ein sehr interessantes Problem, wenn man nicht annimmt dass die Abbildungen kontrahierend sind, so dass der Banachsche Fixpunktsatz nicht anwendbar ist.

14. April

(7) **Teilräume**, **topologische Summen**, **Produkte**; s. [2], 1.3
(8) **Basen** und **Subbasen**, s. [2], 1.4

18. April

(9) **Zusammenhang** und **Weg-Zusammenhang**, s. [2], 1.6
(10) die **Hausdorff Eigenschaft**, s. [2], 1.7

21. April

(11) **Kompaktheit**, s. [2], 1.8

25. April

(12) **Quotienten-Topologie**, s. [2], 3.1–3.3
(13) **topologische Gruppen** und **homogene Räume**, s. [2], 3.4

28. April

(14) Fortsetzung topologische Gruppen und homogene Räume, s. [2], 3.4, 3.5
(15) **Zusammenschlagen von Teilräumen**, s. [2], 3.6
(16) **Verkleben von topologischen Räumen**, s. [2], 3.7

2. Mai

(17) die 1-**Punkt Kompaktifizierung** von nicht-kompakten topologischen Räumen
(18) **lokale Kompaktheit**
(19) die **Vervollständigung** von metrischen Räumen, s. [2], 4.1

9. Mai

(20) die 0-**te Kohomologie** $H^0(X)$ eines topologischen Raumes als Gruppe der stetigen Abbildungen $X \longrightarrow \mathbb{Z}$, s. [4], Chap. 4

(21) die Menge $\pi_0(X)$ der **Weg-Zusammenhangs-Komponenten**, und der injektive Homomorphismus

$$c\colon H^0(X) \longrightarrow Map(\pi_0(X), \mathbb{Z})$$

Ist X **lokal Weg-zusammenhängend**, so ist c ein Isomorphismus, s. [4], Chap. 4.

12. Mai

(22) die von einer Menge M erzeugte freie Abelsche Gruppe $i\colon M \longrightarrow F(M)$, s. [4], Chap. 2.
(23) die 0**-te Homologie** $H_0(X)$ eines topologischen Raumes als die freie Abelsche Gruppe die von $\pi_0(X)$ erzeugt wird, s. [4], Chap. 4
(24) **Homotopie** von stetigen Abbildungen, Interpretation von $\pi_0(X)$ als Menge von Homotopie-Klassen, s. [2], 5.1, oder [4], Chap. 5
(25) **Homotopie-Äquivalenz**, **Zusammenziehbarkeit**, s. [2], 5.2, oder [4], Chap. 5

19. Mai

(26) **Kategorien** und **Funktoren**, s. [2], 5.4 und 5.5
(27) Interpretation von π_0 und H_0 als kovariante Funktoren, und von H^0 als kontravarianter Funktor auf der topologischen Kategorie. Homotopie-Invarianz dieser Funktoren.
(28) der kontravariante Funktor $[-, B]$, und die Definition von $H^1(X)$ als $[X, S^1]$, s. [4], Chap. 5

23. Mai

(29) die Exponentialabbildung $e\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$
(30) das **Hochhebungsproblem** für Abbildungen nach S^1: für stetige Abbildungen $f\colon X \longrightarrow S^1$ sucht man stetige $\tilde{f}\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $e \circ \tilde{f} = f$
(31) Hochhebbarkeit von Abbildungen $[0,1] \longrightarrow S^1$ und der **Abbildungsgrad** für stetige Abbildungen $S^1 \longrightarrow S^1$, s. [4], Chap. 6
(32) $H^1(S^1)$ ist durch den Abbildungsgrad isomorph zu $\mathbb{Z}$, s. [4], Chap. 6. Für eine stetige Abbildung $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ sind folgende Aussagen äquivalent:
- f ist nullhomotop,
- $deg(f) = 0$,
- f hat eine Hochhebung $\tilde{f}\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$.

30. Mai

(33) Für eine stetige Abbildung $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ sind die schon besprochenen Bedingungen dafür dass f nullhomotop ist auch äquivalent dazu dass f eine stetige Fortsetzung zu einer Abbildung $D^2 \longrightarrow S^1$ hat.

Wir machen nun folgende Definition: ein Teilraum $A \subset X$ eines topologischen Raumes ist ein **Retrakt** von X wenn es eine Retraktion von X auf A gibt, das ist eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow A$ mit $f|_A = Id_A$.

Da $deg(Id_{S^1}) = 1 \neq 0$, erhalten wir:

Satz 9. *Die Kreisscheibe D^2 hat keine Retraktion auf ihren Rand S^1.*

Dass $D^1 = [-1, 1]$ keine Retraktion auf seinen Rand $S^0 = \{\pm 1\}$ hat ist einfach einzusehen. Wir können den Beweis aber auch scheinbar kompliziert formulieren, so dass der Knackpunkt die Funktorialität von H^0 ist. Analog können wir den Beweis von Satz 9 so formulieren, dass er sich auf die Funktorialität von H^1 reduziert. Definiert man analoge Funktoren H^n für alle höheren n, so kann man damit genauso beweisen dass D^{n+1} keine Retraktion auf S^n hat.

Aus Satz 9 folgt:

Satz 10 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Abbildung der abgeschlossenen Kreisscheibe D^2 auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.*

Dies folgt auch für D^{n+1} aus der Verallgemeinerung von Satz 9. Für kontrahierende Abbildungen haben wir natürlich schon den Banachschen Fixpunktsatz, Satz 8.

(34) Mit Hilfe des Abbildungsgrades oder der Berechnung von $H^1(S^1)$ beweisen wir wie in [4], Chap. 6:

Satz 11 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes komplexe Polynom $P(z)$ von positivem Grad hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

(35) Als eine weitere Anwendung erhalten wir den

Satz 12 (Satz von Borsuk–Ulam)**.** *Für jede stetige Abbildung $f\colon S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt es mindestens einen Punkt $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$, wobei $-x$ der Antipodenpunkt von x ist.*

Korollar 13. *Eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$ kann nicht homöomorph zu einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ sein.*

Beweis. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein Homöomorphismus auf eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Da U offen ist, enthält U eine $S^2 \subset S^{n-1}$, und der Satz von Borsuk–Ulam zeigt dass f nicht injektiv sein kann, im Widerspruch dazu dass f ein Homöomorphismus sein sollte. □

Wiederum ist die entsprechende Aussage für $\mathbb{R}^1$ einfach. Ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ wird durch Entfernen eines Punktes unzusammenhängend. Da zusammenhängende offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ auch nach Entfernen eines Punktes zusammenhängend bleiben, kann ein Intervall also nicht homöomorph zu einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n$ sein. Wir könnten auch genauso wie im Beweis des Korollars argumentieren, da S^1 nicht injektiv nach $\mathbb{R}$ abgebildet werden kann...

2. Juni

(36) Sei X ein beliebiger topologischer Raum und $f\colon X \longrightarrow S^1$ eine stetige Abbildung. Wir beweisen, dass Homotopien von f nach $\mathbb{R}$ hochgehoben werden können, falls f hochgehoben werden kann, vgl. [4], Chap. 7 oder [2], S. 165, wo mit demselben Argument die allgemeinere Aussage für sogenannte Überlagerungen bewiesen wird.

Satz 14. *Sei $\tilde{f}\colon X \longrightarrow S^1$ eine Hochhebung von f, und $F\colon X \times [0, 1] \longrightarrow S^1$ eine Homotopie mit $F(x, 0) = f(x)$. Dann gibt es genau eine Homotopie $\tilde{F}\colon X \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}(x)$.*

Korollar 15. *Eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow S^1$ ist nullhomotop genau dann wenn sie eine Hochhebung $\tilde{f}\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ hat.*

(37) Ein anderes Kriterium dafür dass $f\colon X \longrightarrow S^1$ nullhomotop ist wird mit Hilfe des Abbildungsgrades formuliert, s. [4], Chap. 7:

Satz 16. *Ist X lokal Weg-zusammenhängend, so ist eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow S^1$ nullhomotop genau dann wenn $deg(f \circ \gamma) = 0$ für alle stetigen $\gamma\colon S^1 \longrightarrow X$.*

Da wir also X mit Abbildungen $\gamma\colon S^1 \longrightarrow X$ testen sollen, basteln wir aus diesen eine Gruppe, die sogenannte Fundamentalgruppe von X. Die Abbildung f definiert dann einen Homomorphismus von dieser Gruppe nach $\mathbb{Z}$, und f ist nullhomotop genau dann, wenn der Homomorphismus identisch Null ist...

6. Juni

(38) Wir betrachten nun statt der Kategorie der topologischen Räume X, die Kategorie von Raumpaaren (X, A), wobei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Teilraum ist. Die Morphismen zwischen zwei Objekten (X, A) und (Y, B) sind stetige Abbildungen $f\colon X \longrightarrow Y$ mit der Eigenschaft $f(A) \subset B$. Wenn wir Homotopien $F\colon X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ von solchen Abbildungen betrachten, dann nur solche, für die $F(A \times [0, 1]) \subset B$, d. h. F ist ein Morphismus von dem Raumpaar $(X \times [0, 1], A \times [0, 1])$ in das Raumpaar (Y, B).

(39) Sei X ein topologischer Raum, und $x_0 \in X$ ein fest gewählter Basispunkt. Für jede natürliche Zahl n definieren wir $\pi_n(X, x_0)$ als die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $(S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$, wobei $s_0 \in S^n$ ein fester Basispunkt auf der Sphäre ist, und Homotopien im Sinne der obigen Erklärung Abbildungen von Raumpaaren sind. In diesem speziellen Fall spricht man auch von Basispunkt-erhaltenden Homotopien. Für $n = 0$ stimmt diese Definition mit unserer früheren Definition von $\pi_0(X)$ als Menge der Weg-Zusammenhangs-Komponenten von X überein, weil S^0 aus zwei Punkten besteht, von denen der Basispunkt immer auf x_0 abgebildet wird. Der andere Punkt wählt dann eine Weg-Zusammenhangs-Komponente aus, und die Homotopie-Klasse einer Abbildung $(S^0, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$ enthält keine weitere Information.

(40) Alternativ können wir $\pi_n(X, x_0)$ auch beschreiben als die Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von Raumpaaren $(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, x_0)$, oder $([0, 1]^n, \partial([0, 1]^n)) \longrightarrow (X, x_0)$.

(41) Für $n \geq 1$ definieren wir auf $\pi_n(X, x_0)$ eine Gruppenstruktur, z. B. indem wir den Würfel $[0, 1]^n$ in zwei Würfel unterteilen, und zwei Abbildungen α und β nach X auf den beiden Teilwürfeln betrachten, die die Eigenschaft haben, den Rand des Würfels konstant nach x_0 abzubilden. Dies induziert eine wohl-definierte Multiplikation auf $\pi_n(X, x_0)$, mit neutralem Element die Homotopie-Klasse der konstanten Abbildung. Mit dieser Gruppenstruktur nennt man $\pi_n(X, x_0)$ die **n-te Homotopie-Gruppe von X bzgl.** x_0. Die erste Homotopie-Gruppe heisst auch die **Fundamentalgruppe von X bzgl.** x_0.

(42) Für $n \geq 2$ ist $\pi_n(X, x_0)$ kommutativ.

(43) Es ist klar, dass für $n \geq 1$, $\pi_n(X, x_0)$ nur abhängt von der Weg-Zusammenhangs-Komponente von X in der x_0 liegt. Falls X noch andere Weg-Zusammenhangs-Komponenten hat, so spielen diese für $\pi_n(X, x_0)$ keine Rolle. Wir dürfen also die Homotopie-Gruppen von X für jede Weg-Zusammenhangs-Komponente separat diskutieren. Nehmen wir an, dass X Weg-zusammenhängend ist, so induziert ein stetiger Weg $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(t) = x_t$ einen Isomorphismus $\gamma_*\colon \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1)$. Damit ist also die Isomorphie-Klasse der n-ten Homotopie-Gruppe eines Weg-zusammenhängenden Raumes unabhängig vom gewählten Basispunkt. Wir schreiben dann auch $\pi_n(X)$ an Stelle von $\pi_n(X, x_0)$.

(44) Der Abbildungsgrad gibt einen Isomorphismus zwischen $\pi_1(S^1)$ und der unendlichen zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}$. Dies ist nur eine Umformulierung des Beweises, der zeigte dass der Abbildungsgrad $H^1(S^1)$ isomorph auf $\mathbb{Z}$ abbildet.

9. Juni

(45) Die n-te Homotopie-Gruppe von (X, x_0) definiert einen kovarianten Funktor von der Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkt in die Kategorie der Gruppen.

(46) Wir haben nun folgendes Analogon von Punkt (21):

Satz 17. *Sei X ein topologischer Raum der Weg-zusammenhängend und lokal Weg-zusammenhängend ist. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} c\colon H^1(X) &\longrightarrow Hom(\pi_1(X, x_0), \mathbb{Z}) \\ [f] &\longmapsto ([\gamma] \mapsto deg(f \circ \gamma)) \end{aligned}$$

ein injektiver Gruppen-Homomorphismus.

Der wichtigste Teil im Beweis ist die Injektivität. Hierfür benutzen wir Satz 16.

(47) Da die Homomorphismen $c([f])$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ homomorph in die Abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ abbilden, kommt es hier nur auf die Abelianisierung der Fundamentalgruppe an. Diese wird wie folgt definiert. Sei G eine beliebige Gruppe. Die **Abelianisierung** von G besteht aus einer Abelschen Gruppe $H_1(G)$ und einem Homomorphismus $A\colon G \longrightarrow H_1(G)$ mit der Eigenschaft dass jeder Homomorphismus $f\colon G \longrightarrow H$, mit H Abelsch, eindeutig durch A faktorisiert, d. h. es gibt genau einen Homomorphismus $\bar{f}\colon H_1(G) \longrightarrow H$ mit $\bar{f} \circ A = f$. Dann ist

$$\begin{aligned} Hom(G, \mathbb{Z}) &\longrightarrow Hom(H_1(G), \mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto \bar{f} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus, dessen Inverses einem $g \in Hom(H_1(G), \mathbb{Z})$ die Komposition $g \circ A$ zuordnet. Definieren wir die **erste Homologie** $H_1(X)$ eines Weg-zusammenhängenden topologischen Raumes X als die Abelianisierung seiner Fundamentalgruppe, so gibt Satz 17 einen injektiven Homomorphismus

$$H^1(X) \longrightarrow Hom(H_1(X), \mathbb{Z}) \; .$$

(48) Wie üblich zeigt die verlangte Eindeutigkeit der Faktorisierung, dass die Abelianisierung einer Gruppe, falls sie existiert, bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Die Existenz der Abelianisierung zeigen wir, indem wir die normale Untergruppe $C(G) \subset G$ betrachten, die von den Kommutatoren $xyx^{-1}y^{-1}$ mit $x, y \in G$ erzeugt wird, und

$$A\colon G \longrightarrow H_1(G) = G/C(G)$$

als Projektion auf die Quotientengruppe definieren. Dies hat die gewünschte Eigenschaft, weil jeder Homomorphismus von G in eine Abelsche Gruppe auf $C(G)$ trivial ist.

13. Juni

(49) Wir wollen nun ein weiteres Grundproblem der Topologie diskutieren, und zwar das **Fortsetzungs-Problem** für stetige Abbildungen. Seien X und Y topologische Räume, und $A \subset X$ ein Teilraum. Gegeben eine stetige Abbildung $f\colon A \longrightarrow Y$, suchen wir eine stetige Fortsetzung $F\colon X \longrightarrow Y$ mit $F|_A = f$. Der einfachste Fall betrifft Funktionen, also stetige Abbildungen nach $\mathbb{R}$. Als ersten Schritt beweisen wir, s. [2], 8.2:

Lemma 18 (Urysohnsches Lemma)**.** *Sei X ein topologischer Raum in dem je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen immer durch offene Mengen getrennt werden können. Sind A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen, so gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \longrightarrow [0,1]$ mit $f|_A = 1$ und $f|_B = 0$.*

(50) Nach der Vorbereitung des Urysohnschen Lemmas kommen wir nun zu einer echten Lösung des Fortsetzungs-Problems für Funktionen, s. [2], 8.3:

Satz 19 (Erweiterungs-Satz von Tietze)**.** *Sei X ein topologischer Raum in dem je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen immer durch offene Mengen getrennt werden können. Ist A eine abgeschlossene Teilmenge und $f\colon A \longrightarrow [a,b]$ eine stetige Funktion, so gibt es eine stetige Fortsetzung $F\colon X \longrightarrow [a,b]$ mit $F|_A = f$.*

Man sieht leicht, dass dies richtig bleibt, wenn man als Werte-Bereich der Funktionen ein Produkt von abgeschlossenen Intervallen, oder die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ selbst nimmt.

(51) Es stellt sich natürlich die Frage, wie gross die Klasse der topologischen Räume ist, die die Annahme im Urysohnschen Lemma und im Erweiterungs-Satz von Tietze erfüllen. Auf jeden Fall erfüllen die metrischen Räume die Annahme.

16. Juni

(52) Als Nachtrag zum Urysohnschen Lemma und dem Erweiterungs-Satz von Tietze beweisen wir:

Lemma 20. *In einem kompakten Hausdorff-Raum können disjunkte abgeschlossene Mengen immer durch offene Mengen getrennt werden.*

Siehe [2], 8.1.

(53) Manchmal ist es wichtig zu wissen, dass die Topologie eines gegebenen Raumes nicht zu umfangreich ist. Man sagt, ein topologischer Raum erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, falls jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, und das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Satz 21 (vgl. [2], Bemerkung 6.3.1)**.** *Jede stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist folgenstetig. Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist jede folgenstetige Abbildung $f\colon X \to Y$ in einen beliebigen topologischen Raum stetig.*

Es gibt jedoch folgenstetige Abbildungen $X \to Y$, die nicht stetig sind: Für X nehme man z.B. die Menge der stetigen Funktionen $[0,1] \to [-1,1]$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, für Y den Hilbertraum $L^2([0,1])$ und als Abbildung die Identität.

Satz 22 ([2], Bemerkungen 6.3.2 und 6.3.3)**.** *Jeder kompakte Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist auch folgenkompakt. Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.*

20. Juni

(54) Die definierende Eigenschaft der Kompaktheit eines topologischen Raumes X ist, dass jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat. Äquivalent dazu ist, dass man verlangt dass jede offene Überdeckung eine endliche Verfeinerung hat. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 23. Ein topologischer Raum X ist **parakompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche Verfeinerung hat.

Lokal endlich heisst, dass jeder Punkt eine offene Umgebung hat, die nur endlich viele der Verfeinerungs-Mengen trifft. Hier ist es nun wesentlich, dass man sich den Übergang zu Verfeinerungen erlaubt; mit Teilüberdeckungen kann man Parakompaktheit nicht definieren. Jeder kompakte Raum ist offensichtlich parakompakt. In manchen Büchern, z. B. [2], wird die Hausdorff Eigenschaft als Teil der Parakompaktheit gefordert.

(55) Der Nutzen der Parakompaktheit folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 24. *In jedem parakompakten Hausdorff Raum gilt die Annahme des Urysohnschen Lemmas, d. h. je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen können durch offene Mengen getrennt werden.*

(56) Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Eine untergeordnete **Zerlegung der Eins** besteht aus einem System von stetigen Funktionen $\rho_j\colon X \longrightarrow [0,1]$ mit lokal endlichen Trägern, so dass

$$\Sigma_j \rho_j(x) = 1 ,$$

und der Träger jedes ρ_j in einem U_i enthalten ist. (Die lokale Endlichkeit der Träger stellt sicher, dass die linke Seite immer eine endliche Summe ist.)

(57) Wir beweisen, s. [2], 8.5:

Satz 25. *Sei X ein Hausdorffraum. Dann sind äquivalent:*

(a) *X ist parakompakt,*
(b) *Für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von X existiert eine untergeordnete Zerlegung der Eins.*

(58) Ein besonders wichtige Klasse von topologischen Räumen die parakompakt sind, sind die Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten nur topologische Mannigfaltigkeiten, verzichten also auf differenzierbare Strukturen:

Definition 26. Eine **(topologische) Mannigfaltigkeit** der Dimension n ist ein topologischer Raum X mit folgenden Eigenschaften:

(a) X ist Hausdorffsch
(b) X erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, d.h. X hat eine abzählbare Basis der Topologie
(c) Für alle $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U_x und ein Homöomorphismus $\phi_x\colon U_x \to B_1(0) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid ||p|| < 1\}$ (d.h. X ist *lokal Euklidisch*).

So ein (U_x, ϕ_x) heisst **Karte** für $x \in X$. Ist $\{U_{x_i}\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X durch Kartengebiete, so heisst $\{(U_{x_i}, \phi_{x_i})\}_{i\in I}$ ein **Atlas** für X.

23. Juni

(59) Wie angekündigt beweisen wir nun die Parakompaktheit von Mannigfaltigkeiten:

Satz 27. *Jede Mannigfaltigkeit ist parakompakt. Genauer: für jede offene Überdeckung* $\{A_i\}_{i\in I}$ *existiert ein Atlas* $\{(V_k,\phi_k)\}_{k\in K}$*, so dass die Überdeckung durch die* V_k *eine lokal endliche Verfeinerung von* $\{A_i\}_{i\in I}$ *ist,* $\phi_k : V_k \to B_3(0)$ *ein Homöomorphismus und die Mengen* $W_k := \phi_k^{-1}(B_1(0))$ *bilden eine offene Überdeckung von* X*.*

(60) Für kompakte Mannigfaltigkeiten ist die Parakompaktheit trivial. Trotzdem hier eine Anwendung im kompakten Fall, s. [3], 4-5:

Satz 28. *Sei* M *eine kompakte* n*-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein* N *und eine stetige Abbildung* $f : M \to \mathbb{R}^N$*, die ein Homöomorphismus zwischen* M *und* $f(M)$ *ist. Das heisst,* f *ist eine Einbettung von* M *in* $\mathbb{R}^N$*.*

Der Satz gilt auch für nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten (s. Parakompaktheit,...) aber der Beweis ist dann viel komplizierter.

(61) Bisher haben wir Zerlegungen der Eins benutzt um Funktionen zu konstruieren. Wir können sie aber auch einsetzen um andere Objekte zu konstruieren, z. B. Schnitte in Vektorraum-Bündeln. Dazu erst die Definitionen, s. [2], 8.4:

Definition 29. Ein **Vektorraum-Bündel** vom Rang k über einem topologischen Raum B ist ein topologischer Raum E und eine stetige surjektive Abbildung $\pi : E \to B$ zusammen mit einer Vektorraum-Struktur isomorph zu $\mathbb{R}^k$ auf jeder Faser $\pi^{-1}(x)$ für alle $x \in B$, so dass gilt: Für jedes $x \in B$ existiert eine offene Umgebung U und ein Homöomorphismus $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ mit $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = \pi_1 \circ \phi$ und ϕ ist auf $\pi^{-1}(y)$ ein Vektorraum-Isomorphismus mit $\{y\} \times \mathbb{R}^k$ für alle $y \in U$. (Dies ist die Eigenschaft der *lokalen Trivialität*.)

Ist B eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist E eine $(n+k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Definition 30. Sei $\pi\colon E \to B$ ein Vektorraum-Bündel. Eine stetige Abbildung $s\colon B \to E$ mit $\pi \circ s = Id_B$ heisst ein **Schnitt** von E.

Beispiel 31. $s\colon B \to E$ mit $s(x) = 0 \in \pi^{-1}(x)$ für alle $x \in B$ ist der **Nullschnitt**.

Ist B parakompakt, z.B. eine Mannigfaltigkeit, und $A \subset B$ eine abgeschlossene Teilmenge, so kann jeder Schnitt $s : A \to \pi^{-1}(A)$ zu einem Schnitt $\hat{s} : B \to E$ fortgesetzt werden mit $\hat{s}|_A = s$. Auf diese Art bekommt man für jedes Vektorraum-Bündel einen nicht-trivialen Vektorraum von Schnitten. Die Vektorraum-Struktur der Fasern benutzen wir um (lokale) Schnitte punktweise zu addieren.

27. Juni

(62) Vektorraum-Bündel sind per Definition lokal trivial, aber i. A. nicht global trivial im Sinne der folgenden

Definition 32. Ein Vektorraum-Bündel $\pi : E \to B$ ist **trivial** wenn man in der Definition $U = B$ wählen kann, d.h. es existiert ein Homöomorphismus $\phi : E \to B \times \mathbb{R}^k$ mit $\pi = \pi_1 \circ \phi$, so dass ϕ auf jeder Faser $\pi^{-1}(x)$ ein Vektorraum-Isomorphismus mit $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ ist.

(63) Eine andere Klasse von lokal trivialen aber nicht unbedingt global trivialen Abbildungen sind die Überlagerungen, s. [2], Kapitel 9, oder [1], Chapter 11. Wir folgen der Darstellung in [1].

Definition 33. Eine surjektive Abbildung $\pi : Y \longrightarrow X$ heisst **Überlagerung** von X wenn gilt: Für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U und ein Homöomorphismus $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \Lambda$, mit Λ ein diskreter topologischer Raum, so dass $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = \pi_1 \circ \phi$.

Ist X zusammenhängend, so ist der Homöomorphietyp von Λ unabhängig von x und U.

Definition 34. Eine Überlagerung $\pi\colon Y \longrightarrow X$ heisst **trivial** wenn man $U = X$ wählen kann, d.h. es existiert ein Homöomorphismus $\phi : Y \to X \times \Lambda$ mit Λ diskret und $\pi = \pi_1 \circ \phi$.

Überlagerungen sind z.B.:
(a) $\pi_1 : X \times \Lambda \to X$
(b) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^k$ für $k > 0$
(c) $e : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$
(d) $Y = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0\}, \quad \pi : Y \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (r, \theta) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta)$

(64) Die Kardinalität von Λ heisst die **Blätterzahl** der Überlagerung (wohldefiniert falls X zusammenhängend).

(65) Sei $\pi : Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung. Ist U eine zusammenhängende trivialisierende Umgebung, so ist π eingeschränkt auf jede Zusammenhangskomponente von $\pi^{-1}(U)$ ein Homöomorphismus auf U.

(66) Sei G eine Gruppe, die auf Y so operiert, dass folgende Bedingung erfüllt ist:

$(*)$ Für jedes $y \in Y$ existiert eine offene Umgebung V mit $g(V) \cap g'(V) = \emptyset \; \forall g \neq g' \in G$.

Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist die Operation insbesondere frei.

Erfüllt die Operation $G \times Y \to Y$ die Bedingung $(*)$, so ist die Projektion $\pi : Y \to Y/G = X$ eine Überlagerung mit Faser G (diskret).

Definition 35. Eine **G-Überlagerung** ist eine Überlagerung der Form $\pi : Y \to Y/G$ wie oben.

(67) Die natürliche Äquivalenz-Relation auf den Überlagerungen von einem festen X ist gegeben durch:

Definition 36. Zwei Überlagerungen $\pi : Y \longrightarrow X$, $\pi' : Y' \longrightarrow X$ sind **isomorph**, wenn es einen Homöomorphismus $\phi : Y \to Y'$ gibt mit $\pi' \circ \phi = \pi$.

(68) Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Ein **Schnitt** ist eine stetige Abbildung $s : X \to Y$ mit $\pi \circ s = Id_X$.

Lemma 37. *Eine G-Überlagerung ist trivial genau dann wenn sie einen Schnitt hat.*

Beispiel 38. Es gibt nicht-triviale Überlagerungen, die keine G-Überlagerungen sind und einen Schnitt haben. Sei $Y = S^1_1 + S^1_2$ und $X = S^1$. Die Abbildung $\pi : Y \to X$ gegeben durch $\pi(z) = z^k$ $(k \neq \pm 1)$ für $z \in S^1_1$ und $\pi(z) = z$ für $z \in S^1_2$ ist eine nicht-triviale Überlagerung. Die Abbildung $s : X \to Y, t \mapsto t \in S^1_2 \subset Y$ ist ein Schnitt.

(69) Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung mit $\pi(y) = x$, $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung mit $f(z) = x$. Das **Hochhebungsproblem** für f lautet: Gibt es eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : Z \to Y$ mit $\widetilde{f}(z) = y, \pi \circ \widetilde{f} = f$?

Lemma 39 (Eindeutigkeit)**.** *Ist Z zusammenhängend, so gibt es höchstens eine solche Hochhebung.*

Vgl. [1], Lemma 11.5.

(70) Für Wege ist das Hochhebungs-Problem immer lösbar, s. [1], Prop. 11.6 oder [2], 9.3:

Proposition 40. *Sei $\pi : Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung, $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow X$ ein Weg. Sei $y \in Y$ mit $\pi(y) = \gamma(a)$. Dann gibt es genau einen Weg $\widetilde{\gamma}\colon [a,b] \longrightarrow Y$ mit $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ und $\widetilde{\gamma}(a) = y$.*

Dasselbe Argument zeigt, dass Homotopien hochhebbar sind sobald die Anfangs-Abbildung eine Hochhebung hat. Insbesondere gilt, s. [1], Prop. 11.8 oderr [2], 9.3:

Proposition 41. *Sei $\gamma : [a,b] \to X$ ein Weg, $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung, $H : [a,b] \times [0,1] \to X$ eine Homotopie von γ mit $H(-,0) = \gamma(-)$. Ist $\widetilde{\gamma} : [a,b] \to Y$ eine Hochhebung von γ so existiert eine eindeutige Hochhebung $\widetilde{H} : [a,b] \times [0,1] \to Y$ mit $\widetilde{H}(-,0) = \widetilde{\gamma}(-)$ und $\pi \circ \widetilde{H} = H$.*

(71) Damit erhalten wir folgenden wichtigen

Satz 42. *Sei $\pi\colon Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung mit $\pi(y) = x$. Dann ist die induzierte Abbildung $\pi_* : \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X,x)$ injektiv.*

30. Juni

(72) Sei $\pi\colon Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung. Ist $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt x. Dann ist$[\gamma] \in \pi_1(X,x)$ im Bild(π_*) genau dann wenn die Hochhebung von γ nach y geschlossen ist.

Seien $x, x' \in X$ und γ, γ' Wege von x nach x'. Seien $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}'$ die eindeutigen Hochhebungen nach Y mit Startpunkt y. Die Hochhebungen $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}'$ haben denselben Endpunkt genau dann wenn $[\gamma^{-1} \cdot \gamma'] \in \pi_1(X,x)$ in Bild(π_*) enthalten ist.

(73) Wir beweisen nun, vgl. [1], 13a:

Satz 43. *Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $f : Z \to X$ stetig mit Z Weg-zusammenhängend und lokal Weg-zusammenhängend. Es gibt eine stetige Hochhebung $\widetilde{f} : Z \to Y$ mit $\pi \circ \widetilde{f} = f$ genau dann wenn $f_*(\pi_1(Z,z)) \subset \pi_*(\pi_1(Y,y))$, wobei $x \in X, y \in Y, z \in Z$ sind mit $f(z) = x = \pi(y)$. Falls $\widetilde{f}$ existiert, so ist es durch die Bedingung $\widetilde{f}(z) = y$ eindeutig bestimmt.*

Korollar 44. *Sei X Weg-zusammenhängend und lokal Weg-zusammenhängend, $\pi : Y \to X, \pi' : Y' \to X$ Überlagerungen von X mit Y, Y' Weg-zusammenhängend und $\pi(y) = \pi'(y') = x$. Es gilt: $\pi : Y \to X$ und $\pi' : Y' \to X$ sind isomorph genau dann wenn Bild$(\pi_*) =$ Bild(π'_*) in $\pi_1(X,x)$.*

(74) $\mathrm{Aut}(Y/X) = \{f \in \text{Homöo}(Y) \mid \pi \circ f = \pi\}$ heisst die **Automorphismengruppe** oder die **Gruppe der Decktransformationen** der Überlagerung $\pi\colon Y \to X$, s. [1], 13b.

Proposition 45. *Ist $\pi\colon Y \to X$ eine G-Überlagerung, so ist*

$$\begin{aligned}\phi\colon G &\longrightarrow \mathit{Aut}(Y/X)\\ g &\longmapsto (y \mapsto g \cdot y)\end{aligned}$$

ein injektiver Homomorphismus. Ist Y zusammenhängend, so ist ϕ ein Isomorphismus.

4. Juli

(75) Wir beweisen nun:

Satz 46. *Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung, Y zusammenhängend. Dann operiert Aut(Y/X) so auf Y, dass die Bedingung $(*)$ erfüllt ist. Operiert Aut(Y/X) transitiv auf $\pi^{-1}(x)$ für ein $x \in X$, so ist $\pi : Y \to X$ eine G-Überlagerung mit $G =$ Aut(Y/X).*

(76) In dem Fall dass $Bild(\pi_*)$ eine normale Untergruppe der Fundamentalgruppe von X ist gilt:

Satz 47. *Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung, Y Weg-zusammenhängend, X lokal Weg-zusammenhängend, $\pi(y) = x$. Ist $\pi_*(\pi_1(Y, y))$ eine normale Untergruppe von $\pi_1(X, x)$ so gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\pi_1(X, x)/\pi_*(\pi_1(Y, y)) \cong$ Aut(Y/X). Die Überlagerung ist eine G-Überlagerung mit $G =$ Aut(Y/X).*

7. Juli

(77) Sei X Weg-zusammenhängend und lokal Weg-zusammenhängend. Eine zusammenhängende Überlagerung $\pi\colon Y \to X$ heisst **universelle Überlagerung** wenn $\pi_1(Y, y) = \{e\}$, d.h. Y ist einfach zusammenhängend. Falls $\pi\colon Y \to X$ universell ist, bezeichnen wir Y auch mit $\widetilde{X}$.

Eine universelle Überlagerung ist nach dem bereits bewiesenen Eindeutigkeits-Lemma bis auf Basis-Punkt erhaltenden Isomorphismus eindeutig und ist eine G-Überlagerung mit $G = \pi_1(X, x)$.

(78) Sei $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung. Sei $U \subset X$ eine offene Menge über der $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ trivial ist. Dann ist jeder geschlossene Weg γ in U in X null-homotop. Dies motiviert die folgende

Definition 48. X heisst **semilokal einfach zusammenhängend** wenn X Weg-zusammenhängend und lokal Weg-zusammenhängend ist und jeder Punkt in X eine Umgebung U hat mit der Eigenschaft, dass jeder geschlossene Weg in U in X null-homotop ist.

Dies ist schwächer als „lokal einfach zusammenhängend".

(79) Semilokal einfach zusammenhängend zu sein ist die charakterisierende Eigenschaft der Räume die eine universelle Überlagerung haben, s. [1], 13c, oder [2], 9.7:

Satz 49. *Sei X Weg-zusammenhängend und lokal Weg-zusammenhängend. Dann hat X eine universelle Überlagerung genau dann wenn X semilokal einfach zusammenhängend ist.*

Ein Beispiel das diese Eigenschaft nicht hat, kann wie folgt konstruiert werden. Sei $C_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus 0$. C_n ist ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ um den Punkt $(\frac{1}{n}, 0)$ mit Radius $\frac{1}{n}$. Sei $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset \mathbb{R}^2$ mit der Teilraumtopologie. Dann ist X Weg-zusammenhängend und lokal Weg-zusammenhängend, aber *nicht* semilokal einfach zusammenhängend, da jede Umgebung von $(0, 0) \in X$ einen Kreis C_n, für n gross genug, ganz enthält.

Ist X eine Mannigfaltigkeit, so hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung homöomorph zu einem $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Da $B_1(0)$ zusammenziehbar ist, ist jeder geschlossene Weg in so einer Umgebung sogar in der Umgebung selbst null-homotop. Also ist X (semi-)lokal einfach zusammenhängend.

(80) Die Universalität der universellen Überlagerung ist in folgendem Satz enthalten:

Satz 50. *Ist $\pi : \widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung, so gibt es für jede zusammenhängende Überlagerung $\pi_Y : Y \to X$ eine Gruppe $\widehat{G}$ mit $Y = \widetilde{X}/\widehat{G}$, $\widehat{G} \subset$ Aut$(\widetilde{X}/X)$.*

Sei X semilokal einfach zusammenhängend und $x \in X$. Dann gibt es eine Bijektion

$$\left.\left\{\begin{array}{c}\text{Überlagerungen } \pi : (Y,y) \to (X,x) \\ \text{mit } Y \text{ Weg-zusammenhängend} \\ \text{und } \pi(y) = x\end{array}\right\}\middle/\sim\right. \quad \longleftrightarrow \{U \subset \pi_1(X,x) \mid U \text{ Untergruppe}\}$$

wobei $\sim$ auf der linken Seite Äquivalenz bis auf Basis-Punkt erhaltenden Isomorphismus bedeutet. Die Bijektion ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} \pi : Y \to X & \longmapsto & \text{Bild}(\pi_*) \\ \pi : \widetilde{X}/U \to X & \longleftarrow & U. \end{array}$$

Ist $U_1 \subset U_2$, so ist $\widetilde{X}/U_1 \to \widetilde{X}/U_2$ wohldefiniert und eine Überlagerung. Ist $U \subset \pi_1(X,x)$ normal, so ist $\widetilde{X}/U \to X$ eine G-Überlagerung mit $G = \pi_1(X,x)/U$.

(81) Analogie mit der Galois-Theorie: Sei K eine endliche Galois-Erweiterung von k. Dann gibt es nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Zwischenkörper } k \subset L \subset K\} & \longleftrightarrow & \{U \subset \text{Gal}(K,k) \mid U \text{ Untergruppe}\} \\ L & \longmapsto & \text{Gal}(K,L) \\ \text{Fix}(U) & \longleftarrow & U. \end{array}$$

Falls $U_1 \subset U_2$, so ist $\text{Fix}(U_2) \subset \text{Fix}(U_1)$. Falls $U \subset \text{Gal}(K,k)$ normal ist, so ist $\text{Fix}(U)$ eine Galois-Erweiterung von k mit $\text{Gal}(\text{Fix}(U),k) = \text{Gal}(K,k)/U$.

Dies motiviert die folgende Sprechweise: Eine **Galois-Überlagerung** $\pi\colon Y \longrightarrow X$ ist eine zusammenhängende Überlagerung mit $\text{Bild}(\pi_*) \subset \pi_1(X,x)$ normal. Jede Galois-Überlagerung ist eine G-Überlagerung mit $G = \pi_1(X,x)/\text{Bild}(\pi_*)$.

11. Juli

(82) Sei G eine Gruppe mit der diskreten Topologie und X ein semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum mit universeller Überlagerung $\pi : (\widetilde{X},\widetilde{x}) \to (X,x)$.

Sei $\rho : \pi_1(X,x) \to G$ ein Homomorphismus. Dann operiert $\pi_1(X,x)$ stetig von links auf $\widetilde{X} \times G$ durch

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X,x) \times (\widetilde{X} \times G) & \longrightarrow & \widetilde{X} \times G \\ ([\sigma],(z,g)) & \longmapsto & ([\sigma]\cdot z, g\cdot \rho([\sigma])^{-1}). \end{array}$$

Sei $Y_\rho = (\widetilde{X} \times G)/_{\pi_1(X,x)}$ und $\pi_\rho\colon Y_\rho \longrightarrow X, [z,\rho] \longmapsto \pi(z)$.

Lemma 51. *$\pi_\rho\colon Y_\rho \longrightarrow X$ ist wohldefiniert und eine Überlagerung.*

Beispiel 52. (a) Sei $\rho : \pi_1(X,x) \longrightarrow G, [\sigma] \longmapsto e$ der triviale Homomorphismus. Dann ist $\pi_\rho : Y_\rho \to X$ isomorph zu der trivialen Überlagerung $\pi_1\colon X \times G \longrightarrow X$.

(b) Sei $\rho\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow G$ surjektiv. Dann ist $H = \ker\rho \subset \pi_1(X,x)$ eine normale Untergruppe, und $Y_\rho = \widetilde{X}/H \to X$ ist eine Galois-Überlagerung mit Gruppe $\pi_1(X,x)/H \cong G$.

Die Überlagerung $\pi_\rho\colon Y_\rho \longrightarrow X$ hat einen ausgezeichneten Basispunkt: $[\widetilde{x},e] \in Y_\rho$. Es gilt $\pi_\rho([\widetilde{x},e]) = \pi(\widetilde{x}) = x$.

Lemma 53. *$\pi_\rho\colon Y_\rho \longrightarrow X$ ist eine G-Überlagerung durch die Operation*

$$G \times Y_\rho \longrightarrow Y_\rho, (h,[z,g]) \longmapsto [z,hg].$$

(83) Umgekehrt sei $p\colon (Y,y) \longrightarrow (X,x)$ eine G-Überlagerung mit $p(y) = x$. Sei $\rho\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow G, [\sigma] \longmapsto \rho([\sigma])$, wobei $\rho([\sigma])$ auf y wirkt durch $y \mapsto$ Endpunkt der Hochhebung von σ mit Startpunkt y. Dadurch ist $\rho([\sigma])$ eindeutig festgelegt.

Ist γ ein Weg in X mit Anfangspunkt x, so bezeichne $\rho([\gamma])y$ den Endpunkt der Hochhebung von γ mit Anfangswert y.

Lemma 54. *Sei $z \in p^{-1}(x)$, γ ein Weg in X der bei x beginnt.*

(a) *Sei $[\sigma] \in \pi_1(X,x)$. Dann gilt:*

$$\rho([\gamma])(\rho([\sigma])z) = \rho([\gamma]\cdot[\sigma])z.$$

(b) *Sei $g \in G$. Dann gilt:*

$$g \cdot (\rho([\gamma])z) = \rho([\gamma])(g \cdot z).$$

Lemma 55. *$\rho : \pi_1(X,x) \to G$ ist ein Homomorphismus.*

(84) Zusammenfassend haben wir, vgl. [1], 14a:

Satz 56. *Die obigen Konstruktionen geben eine Bijektion*

$$\mathit{Hom}(\pi_1(X,x),G) \longleftrightarrow \{G\text{-Überlagerungen } p : (Y,y) \to (X,x)\}/_\sim,$$

wobei $\sim$ auf der rechten Seite Äquivalenz bis auf Basis-Punkt erhaltenden Isomorphismus bezeichnet.

14. Juli

(85) Wir betrachten nun das Verhalten der Fundamentalgruppe unter der Zerlegung von Räumen in offene Teilmengen. Sei X ein Weg-zusammanhängender topologischer Raum, $U, V \subset X$ Weg-zusammenhängende offene Mengen die X ganz überdecken, und zwar so, dass $U \cap V$ ebenfalls Weg-zusammenhängend ist. Sei $x \in U \cap V$. In dieser Situation ist die Fundamentalgruppe von X bzgl. x vollständig bestimmt durch die Fundamentalgruppen von U, V und $U \cap V$, und die Inklusions-induzierten Homomorphismen zwischen ihnen. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes:

Satz 57 (Satz von Seifert und van Kampen)**.** *Seien $i_U\colon U\cap V \longrightarrow U$, $i_V\colon U\cap V \longrightarrow V$ und $j_U\colon U \longrightarrow X$, $j_V\colon V \longrightarrow X$ die Inklusionen. Für beliebige Gruppen G induziert jeder Homomorphismus $\rho\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow G$ Homomorphismen $\rho_U = \rho\circ(j_U)_*$ und $\rho_V = \rho\circ(j_V)_*$ von $\pi_1(U,x)$ bzw. $\pi_1(V,x)$ nach G, mit der Eigenschaft, dass $\rho_U \circ (i_U)_* = \rho_V \circ (i_V)_*$.*

Umgekehrt gibt es für jedes Paar von Homomorphismen $\rho_U\colon \pi_1(U,x) \longrightarrow G$ und $\rho_V\colon \pi_1(V,x) \longrightarrow G$ mit der Eigenschaft $\rho_U \circ (i_U)_* = \rho_V \circ (i_V)_*$ genau einen Homomorphismus $\rho\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow G$ mit $\rho_U = \rho \circ (j_U)_*$ und $\rho_V = \rho \circ (j_V)_*$.

Der Satz gilt zwar in dieser Allgemeinheit, wir beweisen ihn aber nur unter der Zusatz-Annahme dass die beteiligten Räume semilokal einfach zusammenhängend sind. Dann gibt es universelle Überlagerungen, und wir können Satz 56 benutzen um mit G-Überlagerungen zu argumentieren, vgl. [1], 14c.

(86) Wir benutzten den Satz von Seifert–van Kampen um die Fundametalgruppe der Sphären und der 1-Punkt Vereinigung von zwei Kreisen auszurechnen. Wir können auch T^2 betrachten. Hier wissen wir schon, dass $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ gilt. Trotzdem: wir wählen U als Kreisscheibe um einen Punkt $y \in T^2$, und $V = T^2 \setminus \{y\}$. Dann ist die Fundamentalgruppe von U trivial, und die von V frei mit zwei Erzeugenden, da V Homotopie-äquivalent zur

1-Punkt Vereinigung von zwei Kreisen ist. Die Fundamentalgruppe von $U \cap V$ ist unendlich zyklisch, erzeugt von dem Kommutator der Erzeuger in der Fundamentalgruppe von V. Der Satz von Seifert–van Kampen sagt nun, dass die Fundamentalgruppe von T^2 die Abelianisierung der freien Gruppe mit 2 Erzeugenden ist.

Literatur

1. W. Fulton, *Algebraic topology, a first course*, Springer Verlag.
2. K. Jänich, *Topologie*, Springer Verlag.
3. J. R. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice-Hall.
4. C. T. C. Wall, *A geometric introduction to topology*, Dover.