# Lebesgue- und Sobolevräume

Sabine Mandel

Ludwig–Maximilians–Universität

Hüttenseminar 7.1.2015-10.1.2015

# Lebesgueräume

Sei $1 \leq p \leq \infty, \;\; G \subseteq \mathbb{R}$.

$$L^p(G) = \{f\colon\, G \to \mathbb{R} \mid \;\; f \text{ Lebesgue-messbar mit } ||f||_p < \infty\}$$

$$||f||_p = \begin{cases} \left(\int_G |f(x)|^p \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty \\ \inf\limits_{\substack{N \subset G \\ N \text{ Nullmenge}}} \; \sup\limits_{G \setminus N} \; |f(x)| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

$$L^p_{\text{loc}}(G) = \{f\colon\, G \to \mathbb{R} \mid \forall G' \subset\subset G, G' \text{ offen}\colon\, f|_{G'} \in L^p(G')\}$$

# Lebesgueräume

Satz von Fischer-Riesz

$L^p$ mit $||\cdot||$ ist vollständig, also ein Banachraum.

Sei $< f, g >_2 = \int_G fg$ ein Skalarprodukt.

$\Rightarrow L^2(G)$ mit $< f, g >_2$ ist ein Hilbertraum.

# Lebesgueräume

Betrachte $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x}$ .

- $\underline{f \notin L^1}$: $\int_1^\infty |\frac{1}{x}|\ \mathrm{dx} = \int_1^\infty \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} = \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} = \lim\limits_{a\to\infty} [\ln(x)]_1^a = \lim\limits_{a\to\infty} [\ln(a) - \ln(1)] = \infty$

- $\underline{f \in L^2}$: $\left(\int_1^\infty |\frac{1}{x}|^2\ \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a x^{-2}\ \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim\limits_{a\to\infty} [-\frac{1}{x}]_1^a\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim\limits_{a\to\infty} [-\frac{1}{a} + 1]\right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 < \infty$

# Schwache Ableitung

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad u, v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(G)$, und $\varphi \in C_0^\infty(G)$ Testfunktion.

Falls gilt: $\int_G u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_G v_\alpha \varphi$ für alle $\varphi$, dann ist $v_\alpha$ die schwache Ableitung von u mit $v_\alpha = D^\alpha u$, wobei gilt:

$C_0^\infty(G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \,|\, \operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in G \mid \varphi(x) \neq 0\}} \subset G \text{ kompakt}\}$

# Schwache Ableitung

- $f: G \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|,\ G = ]-1,1[ \subset \mathbb{R},\ \alpha = 1.$ Dann gilt:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \text{beliebig} & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

- $f: ]0,2[ \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x & x \in ]0,1] \\ 1 & x \in ]1,2[ \end{cases},\ \alpha = 1.$ Dann gilt:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x \in ]0,1] \\ 0 & x \in ]1,2[ \end{cases}$$

# Schwache Ableitung

Sei $\varphi \in C_0^\infty(]0,2[)$ beliebig.

$$\int_0^2 f(x)\varphi'(x)\ \mathrm{dx} = \int_0^1 x\varphi'(x)\ \mathrm{dx} + \int_1^2 1\varphi'(x)\ \mathrm{dx}$$

$$= [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{dx} + [\varphi(x)]_1^2 = -\int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{dx} + \varphi(2)$$

$$= -\int_0^1 \varphi(x)\ \mathrm{dx} + 0 = -\int_0^1 f'(x)\varphi(x)\ \mathrm{dx} - \int_1^2 f'(x)\varphi(x)\ \mathrm{dx}$$

$$= -\int_0^2 f'(x)\varphi(x)\ \mathrm{dx}$$

# Soboleväume

Sei $p \in [1, \infty],\ m \in \mathbb{N}_0$.

$$H^{m,p}(G) = \{u \in L^p(G) \mid u \text{ besitzt } \upsilon_\alpha \in L^p(G) \text{ für } 0 \le |\alpha| \le m\}$$

$$||u||_{H^{m,p}} = \begin{cases} \left( \sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} ||D^\alpha u||_p^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty \\ \sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} ||D^\alpha u||_\infty & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

# Sobolevräume

## Eigenschaften Schwacher Ableitungen

Seien $u, v \in H^{m,p}$, $|\alpha| < m$.

- Linearität: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \quad \lambda u + \mu v \in H^{m,p}$ und $D^\alpha (\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha (u) + \mu D^\alpha (v)$
- Für $G' \subset G$ offen gilt: $u \in H^{m,p}(G')$
- Unabhängigkeit der Ableitungsreihenfolge: Seien $\alpha, \beta$ mit $|\alpha| + |\beta| < m$. Dann gilt: $D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$
- Dimensionsabhängig: $|x|^s \in H^{1,p} \Leftrightarrow s > 1 - \frac{n}{p}$

# Sobolevräume

Für $1 \leq p \leq \infty,\ m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $H^{m,p}$ ist ein Banachraum.

Sei $< u, v >_{H^m(G)} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_2$ ein Skalarprodukt.

$\Rightarrow H^m(G)$ mit $< u, v >_{H^m(G)}$ ist ein Hilbertraum.

# Soboleväume

Sei $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq H^{m,p}(G)$ CF. Es gilt:

$||D^\alpha v_k - D^\alpha v_l||_p \leq ||v_k - v_l||_{H^{m,p}(G)}$ also folgt: $(D^\alpha v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ CF.

Sei $v^\alpha \in L^p(G)$ mit $||D^\alpha v_k - v^\alpha||_p \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $v = v^0$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

Es gilt: $\int_G vD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_G v^\alpha\varphi$, und somit folgt:

$v^\alpha = D^\alpha v$.

# Sobolevräume

Sei $m \in \mathbb{N}_0,\ 1 \leq p < \infty$.

$\overset{\circ}{H}{}^{m,p}(G) = \overline{C_0^m(G)}^{||\cdot||_{H^{m,p}(G)}}$ ist ein Banachraum, wobei:

$C_0^m(G) = \{\varphi \in C^m(G) \,|\, \mathrm{supp}\varphi \subset G \text{ kompakt}\}$

# Sobolevräume

Für $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ definieren wir:

$$H^{-m,p'}(G) = \left(\overset{\circ}{H}^{m,p}(G)\right)'$$

$$||f||_{H^{-m,p'}(G)} = \sup_{v \in \overset{\circ}{H}^{m,p}(G) \setminus \{0\}} \frac{|f(v)|}{||v||_{H^{m,p}(G)}}.$$

# Soboleväume

Seien $j \in \{1, ..., n\}$, $g \in L^{p'}(G)$ fest.

$-\int_G D_j v g = f(v)$ mit $f \in H^{-m,p'}(G)$ für $m \in \mathbb{N}$. f ist linear.

$\forall v \in H^{m,p}(G)$ :

$|f(v)| \leq \int_G |D_j v||g| \leq ||D_j v||_p ||g||_{p'} \leq ||v||_{H^{m,p}(G)} ||g||_{p'}$

$\Rightarrow ||f||_{H^{-m,p'}(G)} \leq ||g||_{p'}$